VIII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 3 marca 2016 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (10 punktów)

Wykaż, że jeżeli współczynniki a, b, c równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to równanie to nie ma pierwiastków wymiernych.

Zadanie 2 (10 punktów) Zadanie Stefana Banacha o zapałkach.

Pewien matematyk ma w dwóch kieszeniach marynarki dwa pełne pudełka zapałek, każde z nich zawierające m sztuk zapałek. Za każdym razem, gdy matematyk chce wyciągnąć zapałkę, losuje z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z kieszeni marynarki i wyciąga z niej zapałkę.

a) Wyznacz prawdopodobieństwo, że jeżeli po raz pierwszy matematyk wyciągnie z kieszeni puste pudełko po zapałkach, w pudełku znajdującym się w drugiej kieszeni znajduje się k zapałek, gdzie $k = 0, 1, ..., m$.

b) Dla prawdopodobieństwa wyznaczonego w podpunkcie a), wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę zapałek w pudełku znajdującym się w drugiej kieszeni.

Zadanie 3 (10 punktów)

Odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego od ścian tego czworościanu wynoszą x, y, t, u. Znajdź objętość tego czworościanu jako funkcję x, y, t, u.

Zadanie 4 (10 punktów)

a) Udowodnij, że dla dowolnego $\theta \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest tożsamość
$(2\cos 3\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos\theta + 1)\sin(\frac{\theta}{2}) = \sin(\frac{7\theta}{2})$.

b) Korzystając z a) wykaż, że dla dowolnego $\theta \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest tożsamość
$(8\cos^3\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1)\sin(\frac{\theta}{2}) = \sin(\frac{7\theta}{2})$.

c) Wykaż, że $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ oraz $\cos\frac{6\pi}{7}$ są rozwiązaniami równania $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ (można korzystać z wyników z punktów a) i b)).

Zadanie 5 (15 punktów)

Definicja 1. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *miary zero*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg przedziałów $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ oraz $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \leq \varepsilon$, gdzie $|\cdot|$ oznacza długość przedziału. Rodzinę wszystkich zbiorów miary zero w $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{N}$.

Definicja 2. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *silnie miary zero*, jeżeli dla dowolnego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg przedziałów $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ oraz $|I_n| \leq \varepsilon_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rodzinę wszystkich zbiorów silnie miary zero w $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{SN}$.

Definicja 3. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *mikroskopijnym*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg przedziałów $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ oraz $|I_n| \leq \varepsilon^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rodzinę wszystkich zbiorów mikroskopijnych w $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{M}ic$.

Definicja 4. Rodzinę $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (tj. rodzinę podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$) nazywamy *ideałem*, jeżeli:

(1) $\forall_{A,B\subseteq\mathbb{R}} \, (A \in \mathcal{J} \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{J})$;

(2) $\forall_{A,B\subseteq\mathbb{R}} \, (A \in \mathcal{J} \wedge B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{J})$.

Wskazówka. W *Definicjach 1, 2, 3* wystarczy ograniczyć się do $\varepsilon \in (0, 1)$.

Zadania do wykonania

Na postawie powyższych definicji wykazać, że:

a) $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{M}ic \subseteq \mathcal{N}$; (7 punktów)

b) rodzina $\mathcal{M}ic$ jest ideałem podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$. (8 punktów)

Zadanie 6 (12 punktów)

Definicja 5. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy *niemalejącą (nierosnącą) w zbiorze* $[a, b]$, jeśli dla $x_1, x_2 \in [a, b]$ takich, że $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Funkcję f nazywamy *monotoniczną w zbiorze* $[a, b]$, jeśli jest w tym zbiorze niemalejąca lub nierosnąca.

Definicja 6. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem. *Kresem górnym* (ozn. $\sup A$) zbioru A nazywamy najmniejsze z ograniczeń górnych tego zbioru lub ∞ jeśli zbiór ten jest nieograniczony.

Przykład.

1. $\sup(0, 1) = 1$;
2. $\sup(-\infty, 3] = 3$;
3. $\sup\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$;
4. $\sup \mathbb{N} = \infty$.

Definicja 7. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Wahaniem funkcji* f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę (skończoną lub nie) określoną wzorem

$$W_a^b(f) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, n \in \mathbb{N}\}$$

(tj. $W_a^b(f)$ to kres górny sum skoków wartości funkcji liczony po wszystkich możliwych skończonych podziałach odcinka $[a, b]$). Powiemy, że f ma wahanie skończone, jeśli $W_a^b(f) < \infty$.

Zadania do wykonania

a) Wykaż, że dowolna funkcja stała $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma wahanie $W_a^b(f) = 0$; (2 punkty)

b) niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x) = 2x + 3$ dla $x \in [0, 1]$. Oblicz $W_0^1(f)$; (3 punkty)

c) wykaż, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $W_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$; (4 punkty)

d) wykaż, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $[c, d] \subseteq [a, b]$ to $W_c^d(f) \leq W_a^b(f)$. (3 punkty)

Zadanie 7 (13 punktów)

Inwestycję finansową możemy rozumieć jako ciąg przepływów kapitału między dwoma podmiotami. Zyskiem z inwestycji nazywamy różnicę między sumą otrzymanych wpłat i sumą wydatków.

Przykład. Bank udziela deweloperowi kredyt na wybudowanie nieruchomości. Na początku inwestycji bank wypłaca 2 000 000 zł. Począwszy od 10. miesiąca deweloper spłaca kredyt w 16 równych ratach po 128 500 zł. Mamy wtedy następujące przepływy pieniężne (z punktu widzenia banku):

$$C_0 = -2\,000\,000, \qquad C_1 = C_2 = \ldots = C_9 = 0, \qquad C_{10} = C_{11} = \ldots = C_{25} = 128\,500.$$

(Indeks dolny ciągu oznacza numer miesiąca, w którym wystąpi dany przepływ finansowy.) Zysk banku wynosi

$$16 \cdot 128\,500 - 2\,000\,000 = 56\,000.$$

Przykład. Inwestor kupuje za 955 zł. dziesięcioletnią obligację kuponową Skarbu Państwa o nominale 1000 zł. Zgodnie z umową Skarb Państwa wykupuje na zakończenie każdego roku kolejny kupon obligacji za 15 zł, a na zakończenie inwestycji wypłaca dodatkowo nominalną wartość obligacji. Mamy wtedy następujące przepływy pieniężne (z punktu widzenia inwestora):

$$C_0 = -955, \qquad C_1 = C_2 = \ldots = C_9 = 15, \qquad C_{10} = 1\,015.$$

(Indeks dolny ciągu oznacza numer roku, w którym wystąpi dany przepływ finansowy.) Zysk inwestora wynosi

$$9 \cdot 15 + 1\,015 - 955 = 195.$$

Oczywiście wielkość zysku w istotny sposób zależy od zainwestowanego kapitału i od czasu trwania inwestycji. Dlatego wprowadza się pewne współczynniki, które pozwalają na porównywanie zysków z różnych inwestycji. Zysk z inwestycji finansowej może być (formalnie) wypłacany na końcu bądź na początku inwestycji.

Przykład. Bank udziela klientowi kredytu w kwocie 1 000 zł, na okres 2 lat. Klient ma spłacić po tym okresie jednorazowo 1 050 zł. Dzieląc zysk banku przez zainwestowaną przez Bank kwotę i liczbę lat otrzymamy tzw. *nominalną roczną stopę zwrotu*:

$$\frac{1\,050 - 1\,000}{1\,000 \cdot 2} = 2{,}5\,\%.$$

Przykład. Przedsiębiorca wystawia weksel opiewający na 1 000 zł, z terminem wykupu za 6 miesięcy. (Innymi słowy, przedsiębiorca zobowiązuje się wypłacić nabywcy weksla w terminie za pół roku kwotę 1 000 zł.) Nabywca weksla płaci za niego 985 zł, wobec czego jego zysk wyniesie 15 zł. Dzieląc ten zysk przez otrzymywaną kwotę i liczbę lat otrzymamy tzw. *nominalną roczną stopę dyskonta*:

$$\frac{1\,000 - 985}{1\,000 \cdot 0{,}5} = 3\,\%.$$

Uwaga. W matematyce finansowej bardzo często stosowana jest tzw. *zasada równych miesięcy*, zgodnie z którą obliczenia przeprowadzamy tak, jak gdyby wszystkie miesiące miały tę samą liczbę dni. Oczywiście rok ma 12 miesięcy.

W przypadku jednoczesnego nabywania wielu weksli, dyskontujemy każdy z nich z osobna, stosując ustaloną stopę dyskonta.

Przykład. Przedsiębiorca wystawia dwa weksle, z których każdy opiewa na 1 000 zł, z terminem wykupu odpowiednio za 6 i 12 miesięcy. Jeżeli nominalna roczna stopa dyskonta wynosi 3 %, to nabywca weksli powinien je nabyć za

$$1\,000 \cdot \left(1 - 3\,\% \cdot \frac{6}{12}\right) + 1\,000 \cdot \left(1 - 3\,\% \cdot \frac{12}{12}\right) = 985 + 970 = 1\,955 \text{ zł}.$$

Zadania do wykonania

a) Przedsiębiorca, chcąc uzyskać 4 000 zł, wystawia na sprzedaż za tę kwotę cztery weksle, z terminem wykupu odpowiednio za 3, 6, 9 i 12 miesięcy. Pierwsze trzy z nich opiewają na kwotę 1 020 zł, na czwartym kwota nie jest jeszcze wpisana.
(i) Ile wyniesie nominalna roczna stopa dyskonta, jeżeli na czwartym wekslu wpiszemy kwotę 1 020 zł? Odpowiedź podaj w postaci ułamka zwykłego. (4 punkty)
(ii) Jaką kwotę należy wpisać na czwartym wekslu, jeżeli nominalna roczna stopa dyskonta wynosi 3 %? Odpowiedź zaokrąglij do całkowitej liczby złotych. (4 punkty)

b) Klient nabywa ciąg 52 weksli, z których każdy opiewa na 1000 zł, z terminem wykupu na koniec każdego z tygodni w roku (zakładamy, że rok ma dokładnie 52 tygodnie). Ile klient powinien zapłacić za te weksle, jeżeli zakładamy, że nominalna roczna stopa dyskonta wynosi 5 %? (5 punktów)