VIII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 2 marca 2016 r.

W zadaniach przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1. Suma dwóch ostatnich cyfr liczby 2016^{2016} wynosi

[ ] 7;
[ ] 9;
[ ] 11.

2. Na lekcji wychowania fizycznego klasa Bolka i Lolka, licząca 20 osób, jest dzielona losowo na dwie równoliczne drużyny. Zatem prawdopodobieństwo, że Bolek i Lolek znajdą się

[ ] w tej samej drużynie wynosi $\frac{1}{2}$;
[ ] w różnych drużynach jest mniejsze niż $\frac{3}{4}$;
[ ] w różnych drużynach jest większe od $\frac{1}{2}$;

3. Niech r_1 i r_2 oznaczają długości promieni dwóch okręgów na płaszczyźnie, zaś d odległość między ich środkami. Wówczas

[ ] okręgi te mają dokładnie dwa punkty wspólne, jeżeli $d < r_1 + r_2$;
[ ] okręgi te mają dokładnie dwa punkty wspólne, jeżeli $d > |r_1 - r_2|$;
[ ] okręgi te nie mają punktu wspólnego, jeżeli $d < |r_1 - r_2|$.

4. Dla dowolnej liczby naturalnej n

[ ] liczba $8^n + 6$ jest podzielna przez 7;
[ ] liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30;
[ ] liczba $n^5 - 5n^3 + 4n$ jest podzielna przez 120.

5. Wśród dwudziestu losów na loterii siedem jest wygrywających. Prawdopodobieństwo, że przy zakupie dziesięciu losów, dokładnie trzy z nich są wygrywające

[ ] jest mniejsze niż $\frac{3}{10}$;
[ ] jest mniejsze niż $\frac{1}{3}$;
[ ] jest mniejsze niż $\frac{5}{14}$.

6. W kąt o mierze 60° wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień 40 i jest styczne do ramion kąta, a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Suma pól wszystkich kół tego ciągu wynosi

[ ] 1800π;
[ ] 2000π;
[ ] 2100π.

7. Rozważmy stożek, którego tworząca ma długość 10, a pole powierzchni bocznej to 50π. Niech V_k oznacza objętość kuli wpisanej w ten stożek oraz V_w oznacza objętość pewnego walca wpisanego w ten stożek. Wówczas możliwe jest, że

[ ] $V_k > 2V_w$;
[ ] $V_k = V_w$;
[ ] $V_k < V_w$.

8. Funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla pewnych punktów $a, b \in \mathbb{R}$ spełniają warunki $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Wówczas

[ ] jeżeli $a < b$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = g(c)$;
[ ] jeżeli $a = 0$, to $f(x) - g(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in (0, \infty)$;
[ ] dla każdej liczby c pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $f(x) = c$ lub $g(x) = c$;

9. Ile jest liczb pierwszych p takich, że $p + 64$ jest sześcianem liczby naturalnej?

[ ] 0;
[ ] 1;
[ ] nieskończenie wiele.

10. Załóżmy, że a, b, c, d są liczbami większymi od 3. Rozważmy liczby $\frac{cd}{a}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{da}{b}$, $\frac{bc}{d}$. Wówczas

[ ] co najmniej jedna z nich jest większa od 3;
[ ] co najmniej dwie z nich są większe od 3;
[ ] możliwe jest, że dokładnie trzy z nich są większe od 3.

11. Z koła o promieniu 1 wybrano losowo 7 różnych punktów. Wówczas

[ ] na pewno istnieją dwa punkty, których odległość od siebie wynosi mniej niż 1;
[ ] pole wieloboku, którego wierzchołkami są wybrane punkty (niekoniecznie wszystkie) jest na pewno mniejsze od $\frac{5}{2}$;
[ ] istnieją co najwyżej dwie różne czwórki punktów, które są wierzchołkami kwadratu;
[ ] jeżeli poprowadzono proste przechodzące przez każde dwa punkty i otrzymano w ten sposób 15 różnych prostych, to istnieje dokładnie jedna trójka punktów, które są współliniowe, zaś każde inne trzy punkty nie są współliniowe.

12. Długości boków a, b, c pewnego trójkąta tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, przy czym kąt tego trójkąta leżący naprzeciwko boku o długości b ma miarę $60°$. Trójkąt ten jest zatem na pewno

[ ] ostrokątny;
[ ] rozwartokątny;
[ ] równoboczny;
[ ] prostokątny.

13. W pewnej firmie pracuje siedem kobiet i ośmiu mężczyzn, przy czym średnia wieku kobiet to 32, mężczyzn 25, oraz odchylenie standardowe wieku kobiet to 3,8, a mężczyzn 1,3. Odchylenie standardowe wieku wszystkich pracowników tej firmy

[ ] jest większe zarówno od odchylenia standardowego wieku mężczyzn jak i kobiet;
[ ] jest większe od sumy odchyleń standardowych wieku kobiet i mężczyzn;
[ ] jest mniejsze od podwojonej różnicy odchyleń standardowych wieku kobiet i męczyzn;
[ ] jest większe od odchylenia standardowego wieku mężczyzn i mniejsze od odchylenia standardowego wieku kobiet.

14. Załóżmy, że a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas

[ ] jeżeli $ab > 0$, to $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$;
[ ] jeżeli $ab > 0$, to $\sqrt{ab} \leq \frac{a-b}{2}$;
[ ] $\frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$;
[ ] $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

15. Dany jest sześcian o boku długości $1cm$. Na sześcianie tym zbudowano kulę o promieniu $1cm$ w taki sposób, że środek kuli znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu. Wówczas

[ ] $\frac{1}{4}$ objętości kuli znajduje się wewnątrz sześcianu;
[ ] więcej niż $\frac{1}{3}$ powierzchni ścian sześcianu znajduje się wewnątrz kuli;
[ ] więcej niż $\frac{1}{2}$ objętości sześcianu znajduje się wewnątrz kuli;
[ ] część wspólna wnętrza sześcianu i kuli jest bryłą obrotową.

16. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych ma długość x. Niech y będzie funkcją zmiennej x określającą długość drugiej z przyprostokątnych. Wówczas

[ ] y jest wielomianem;
[ ] y ma granicę przy $x \to \infty$;
[ ] dziedziną funkcji y jest przedział otwarty;
[ ] $y^{-1} = y$, gdzie y^{-1} oznacza funkcję odwrotną do funkcji y.

17. Dana jest funkcja $f(x) = 2 - 6sinxcosx - 3sin^2x + 5cos^2x$. Wówczas

[ ] zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[-4; 8]$;
[ ] funkcja f jest parzysta;
[ ] okresem podstawowym funkcji f jest 2π;
[ ] funkcja f ma dokładnie 4 punkty wspólne z prostą o równaniu $y = x$.

18. Wiadomo, że dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ różnica $\sin\alpha - \cos\alpha$ jest liczbą wymierną. Wówczas

[ ] $\cos 2\alpha$ jest liczbą wymierną;
[ ] $\sin 2\alpha$ jest liczbą wymierną;
[ ] $\cos 4\alpha$ jest liczbą wymierną;
[ ] $\sin 4\alpha$ jest liczbą wymierną.

19. Niech $f(x) = \frac{6x-3}{6-3x}$. Załóżmy, że A, B i C oznaczają kolejno pola trójkątów ograniczonych przez asymptoty wykresu funkcji f oraz przez styczne do wykresu funkcji, odpowiednio w punktach $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ oraz $(1, f(1))$. Wówczas

[ ] $A = B$;
[ ] $A = C$;
[ ] $B = C$;
[ ] $A = \frac{3}{4}B$.

20. Funkcję $f : X \to Y$, gdzie X i Y są dowolnymi niepustymi zbiorami nazywamy suriekcją ("na"), gdy $\forall_{y \in Y}\ \exists_{x \in X}\ f(x) = y$. Dodatkowo, funkcję f nazywamy bijekcją, gdy jest różnowartościowa i jest suriekcją. Wówczas bijekcją jest

[ ] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$;
[ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$;
[ ] $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
[ ] $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$.

21. Ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg, którego dwa pierwsze wyrazy są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich. Niech (a_n) będzie ciągiem Fibonacciego (tzn. $a_1 = a_2 = 1$, zaś S_n sumą n początkowych wyrazów ciągu a_n. Wówczas

[ ] a_{1033} jest liczbą parzystą;
[ ] a_{726} jest liczbą nieparzystą;
[ ] $a_{n+2} > S_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;
[ ] ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest ograniczony.

22. W rozwinięciu dwumianu Newtona $(x^2 + x^{-1})^n$ współczynniki znajdujące się przy x^{-5} i x^{22} są równe. Wówczas w rozwinięciu tego dwumianu

[ ] współczynnik rozwinięcia przy x^7 jest liczbą parzystą;
[ ] jeżeli liczba $a \neq 0$ jest współczynnikiem tego rozwinięcia, to występuje ona w nim dokładnie dwukrotnie;
[ ] n jest równe 16;
[ ] suma współczynników tego rozwinięcia jest całkowitą potęgą liczby 2.

23. Dla czworokąta wypukłego prawdziwe jest twierdzenie:
[ ] każda przekątna ma długość mniejszą od połowy obwodu;
[ ] suma długości boków przeciwległych jest mniejsza od sumy długości przekątnych;
[ ] suma długości przekątnych jest większa od połowy obwodu;
[ ] suma długości przekątnych i najkrótszego boku jest większa od obwodu.

24. Liczby p, q i r są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi większymi od 1. Wówczas
[ ] $|p-q|$ może być podzielne przez r;
[ ] $\sqrt[p]{qr}$ nie jest liczbą wymierną;
[ ] jeżeli liczba pqr ma 16 dzielników, to co najwyżej jedna spośród liczb p, q i r jest pierwsza;
[ ] nie istnieje liczba naturalna $n \geq 2$ taka, że liczba $\sqrt[n]{pqr}$ jest całkowita.

25. Dla ustalonej liczby naturalnej $n > 100$, równanie $a+b+c+d=n$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ma
[ ] $\binom{n+4}{n}$ rozwiązań;
[ ] $\binom{n+3}{3}$ rozwiązań;
[ ] $\binom{n+4}{3}$ rozwiązań, w których liczby a, b, c, d są parami różne;
[ ] dla dowolnego n parzystego tyle samo rozwiązań, w których a, b, c, d są liczbami parzystymi co rozwiązań, w których a, b, c, d są nieparzyste.

26. Ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do pewnych liczb całkowitych i mają wyrazy różne od 0. Wówczas
[ ] ciąg (a_n) jest ograniczony;
[ ] ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest ograniczony;
[ ] ciąg $(a_n b_n)$ jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest rosnący;
[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ zawsze istnieje, przy czym granica ta jest liczbą lub równa $+\infty$ lub $-\infty$.

27. Niech $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb rzeczywistych, wymiernych, całkowitych i naturalnych. Wówczas prawdziwe jest zdanie
[ ] $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{N}} \forall_{z\in\mathbb{Z}}\ x < yz$;
[ ] $\exists_{x\in\mathbb{Q}} \forall_{y\in\mathbb{N}} \exists_{z\in\mathbb{Z}}\ x = yz$;
[ ] $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \exists_{y\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \forall_{z\in\mathbb{N}}\ x \neq yz$;
[ ] $\exists_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \forall_{y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \exists_{z\in\mathbb{N}}\ x > yz$.

28. Prawdziwa jest równość
[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$;
[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$;
[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = \infty$;
[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \infty$.

29. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas
[ ] $f(0) \leq 0$;
[ ] f jest nieparzysta;
[ ] jeżeli f jest funkcją ciągłą, to f jest funkcją liniową;
[ ] $f(100) = 100f(1)$.

30. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 19 = 0$. Wówczas
[ ] okrąg ten położony jest tylko w jednej ćwiartce układu współrzędnych;
[ ] obwód okręgu jest większy od odległości między środkiem okręgu a punktem $(0,0)$;
[ ] okrąg ten jest symetryczny do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 39 = 0$ względem prostej $y = 2x + 1$;
[ ] pole największego trójkąta jaki można wpisać w ten okrąg jest mniejsze od 10.