Szósty Wojewódzki Konkurs Matematyczny „W świecie matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi

18 lutego 2014 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej (do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu).
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy numerze zadania.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Podczas tego etapu Konkursu dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (8 punktów). *Środki czterech kół o promieniu $a > 0$ znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku a. Znaleźć pole części wspólnej danych czterech kół.*

Zadanie 2 (10 punktów). *Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ takiego, że $k \geq 2$, liczba $\sqrt[k]{n^2+n}$ nie jest wymierna.*

Zadanie 3 (8 punktów). *Określ liczbę dzielników liczby*

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot 20^{20}.$$

Zadanie 4 (9 punktów). *Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Rozważmy następujące liczby*

$$M = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i : \alpha_i \in \{0,1\}\right\}, \quad m = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i : \alpha_i \in \{0,1\}\right\}.$$

Pokaż, że

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i| + \sum_{i=1}^{n} a_i}{2}$$

oraz

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} |a_i|}{2}.$$

Definicja. *Rozważmy niepusty zbiór G oraz dwuargumentowe działanie $\circ$ w zbiorze G, tj. $\circ : G \times G \to G$. Uporządkowaną parę $(G, \circ)$ nazywamy* **grupą** *jeśli*

1. $\forall_{a,b,c \in G} \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

2. $\exists_{e \in G} \ \forall_{a \in G} \ a \circ e = e \circ a = a$ *(element e nazywamy elementem neutralnym działania $\circ$);*

3. $\forall_{a \in G} \ \exists_{b \in G} \ a \circ b = b \circ a = e$ *(element b nazywamy elementem odwrotnym do a).*

Ponadto, jeśli

$$\forall_{a,b \in G} \ a \circ b = b \circ a$$

to grupę $(G, \circ)$ nazywamy ***abelową (przemienną)****.*

Przykład 1. *Rozważmy zbiór $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz działanie $\circ : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ określone wzorem*

$$x \circ y = x + y \pmod{5}$$

(tzn. $x \circ y$ to reszta z dzielenia $x + y$ przez 5). Wówczas para $(\mathbb{Z}_5, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 5 (7+8 = 15 punktów).

a) *Niech $G = \mathbb{R}$ oraz rozważmy działanie $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone wzorem*

$$x \star y = x + y + 4.$$

Sprawdzić czy $(G, \star)$ jest grupą abelową.

b) *Niech będzie dana grupa $(G, \circ)$ trójelementowa i niech $G = \{a, b, c\}$. Pokazać, że grupa ta jest abelowa.*

Definicja. *Niech X, Y będą zbiorami. Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.*

Definicja. *Relacją w zbiorze X nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Dla uproszczenia zapisu zamiast $(x, y) \in \mathcal{R}$ piszemy $x\mathcal{R}y$.*

Przykład 2. *Relacją w zbiorze $\mathbb{N}$ jest klasyczna relacja $\leq$ (tj. $(n, m) \in \leq$ wtedy i tylko wtedy gdy $n \leq m$).*

Definicja. *Powiemy, że relacja $\mathcal{R}$ w zbiorze X jest:*

a) zwrotna, jeśli $\forall_{x \in X} \ x\mathcal{R}x$;

b) przechodnia, jeśli $\forall_{x,y,z \in X} \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$;

c) słabo antysymetryczna, jeśli $\forall_{x,y \in X} \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \implies x = y$.

Relację, która jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna, nazywamy ***relacją częściowego porządku*** *w zbiorze X. Relację, która jest relacją częściowego porządku oznaczamy z reguły symbolem $\preceq$.*

Przykład 3. *Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych) oraz relację inkluzji (zawierania) $\subseteq$ w tym zbiorze. Jest to relacja częściowego porządku.*

- *Pokażemy, że $\subseteq$ jest zwrotna. Niech $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, mamy oczywiście $A \subseteq A$.*
- *Pokażemy, że $\subseteq$ jest przechodnia. Niech $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i załóżmy, że $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq C$. Wówczas oczywiście $A \subseteq C$.*
- *Pokażemy, że $\subseteq$ jest słabo antysymetryczna. Niech $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i załóżmy, że $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$. Wówczas $A = B$.*

Definicja. *Niech X będzie niepustym zbiorem oraz $\preceq$ będzie relacją częściowego porządku w tym zbiorze. Element $a \in X$ nazywamy elementem:*

- ***najmniejszym****, jeśli $\forall_{x \in X} \ a \preceq x$;*
- ***minimalnym****, jeśli nie istnieje $x \in X$ taki, że $x \neq a$ oraz $x \preceq a$;*
- ***największym****, jeśli $\forall_{x \in X} \ x \preceq a$;*

- ***maksymalnym***, *jeśli nie istnieje* $x \in X$ *taki, że* $x \neq a$ *oraz* $a \preceq x$.

Twierdzenie 4. *Niech* X *będzie niepustym zbiorem oraz* $\preceq$ *będzie relacją częściowego porządku w tym zbiorze. Wówczas każdy element największy jest maksymalny i każdy element najmniejszy jest minimalny.*

Przykład 5. *Rozważmy zbiór* $X = \{2, 4, 6, 8\}$ *oraz relację* $\preceq$ *w tym zbiorze zdefiniowaną następująco*

$$x \preceq y \iff x \text{ dzieli } y.$$

Pokażemy, że $\preceq$ *jest relacją częściowego porządku:*

- *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest zwrotna. Niech* $x \in X$. *Wówczas oczywiście* x *dzieli* x, *zatem* $x \preceq x$.
- *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest przechodnia. Niech* $x, y, z \in X$ *i załóżmy, że* $x \preceq y$ *oraz* $y \preceq z$, *tj.* $y = kx$, $z = ly$ *dla pewnych* $k, l \in \mathbb{Z}$. *Mamy stąd, że* $z = klx$ *oraz* $kl \in \mathbb{Z}$, *zatem* x *dzieli* z, *więc* $x \preceq z$.
- *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest słabo antysymetryczna. Niech* $x, y \in X$ *i załóżmy, że* $x \preceq y$ *oraz* $y \preceq x$. *Stąd* x *dzieli* y *oraz* y *dzieli* x, *zatem* $x = y$.

Zauważmy, że w zbiorze X *istnieje element najmniejszy, istnieje element minimalny, istnieją dwa elementy maksymalne ale nie istnieje element największy. Istotnie*

- *Liczba* 2 *jest elementem najmniejszym, ponieważ* $2 \preceq 2, 2 \preceq 4, 2 \preceq 6, 2 \preceq 8$.
- *Wobec Twierdzenia 4, liczba* 2 *jest elementem minimalnym. Ale widać to też wprost z definicji: nie istnieje* $x \in X, x \neq 2$ *taki, że* $x \preceq 2$ *(nie istnieje w* X *liczba, która dzieli* 2 *i jest różna od* 2*).*
- *Elementami maksymalnymi są* 8 *oraz* 6, *ponieważ nie istnieje w* X *element* $x \neq 8$, *taki, że* $8 \preceq x$. *Podobnie dla* 6.
- *Nie istnieje element największy, ponieważ jedynymi kandydatami są* 6 *i* 8 *ale mamy, że* $\neg(6 \preceq 8)$ *oraz* $\neg(8 \preceq 6)$.

Definicja. *Relację częściowego porządku* $\preceq$ *w zbiorze* X *nazywamy liniową, jeśli*

$$\forall_{x,y \in X} \; x \preceq y \vee y \preceq x.$$

Przykład 6. *Zauważmy, że relacja częściowego porządku w Przykładzie 5 nie jest liniowa, ponieważ nieprawda, że* $6 \preceq 8$ *oraz nieprawda, że* $8 \preceq 6$. *Innymi słowy, elementy* $6, 8 \in X$ *są nieporównywalne.*

Przykład 7. *W zbiorze* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *rozważmy następującą relację*

$$(n, m) \preceq (k, l) \iff ((n < k) \vee (n = k \wedge m \leq l)).$$

Na przykład w relacji $\preceq$ *są:* $(1, 2) \preceq (2, 1), (3, 4) \preceq (3, 7)$. *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest relacją częściowego porządku:*

- *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest zwrotna. Niech* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Wówczas oczywiście* $(n, m) \preceq (n, m)$.
- *Pokażemy, że* $\preceq$ *jest przechodnia. Niech* $(n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *i załóżmy, że* $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$ *oraz* $(n_2, m_2) \preceq (n_3, m_3)$. *Mamy następujące możliwości*
  - $n_1 < n_2$ *oraz* $n_2 < n_3$. *Wówczas mamy* $n_1 < n_2 < n_3$, *skąd* $n_1 < n_3$, *zatem* $(n_1, m_1) \preceq (n_3, m_3)$.
  - $n_1 < n_2$ *oraz* $n_2 = n_3$ *i* $m_2 \leq m_3$. *Wówczas* $n_1 < n_2 = n_3$, *czyli* $n_1 < n_3$. *Zatem* $(n_1, m_1) \preceq (n_3, m_3)$.

  w pozostałych przypadkach podobnie.
- *Pokażemy, że jest słabo antysymetryczna. Niech* $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *i załóżmy, że* $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$ *oraz* $(n_2, m_2) \preceq (n_1, m_1)$. *Łatwo widać, że mamy jedynie możliwość* $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$, *gdyż* $n_1 = n_2$ *i* $m_1 \leq m_2$ *oraz* $(n_2, m_2) \preceq (n_1, m_1)$, *ponieważ* $n_2 = n_1$ *i* $m_2 \leq m_1$. *Wówczas* $n_1 = n_2, m_1 = m_2$ *czyli* $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$.

Wobec powyższego $\preceq$ *jest częściowym porządkiem w* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Zauważmy, że element* $(1, 1)$ *jest elementem najmniejszym i minimalnym. Istotnie, dla każdego* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *oczywiście mamy* $(1, 1) \preceq (n, m)$. *Ponadto (wobec Twierdzenia 4), nie istnieje ani element maksymalny ani największy, bowiem dla każdego* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *mamy oczywiście* $(n, m) \preceq (n + 1, m)$. *Porządek* $\preceq$ *jest liniowy.*

Zadanie 6 (6+9=15 punktów).

a) Rozważmy zbiór $X = \{3, 7, 9, 12, 252\}$ *i relację* $\preceq$ *określoną formułą*

$$x \preceq y \iff x \text{ dzieli } y.$$

Czy istnieją w tym zbiorze elementy najmniejsze, minimalne, największe, maksymalne? Odpowiedzi uzasadnij i ewentualnie wskaż te elementy.

b) Rozważmy zbiór $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *oraz dwie relacje* $\preceq_1, \preceq_2$ *określone następująco*

$$(n, m) \preceq_1 (k, l) \iff n \leq k \wedge m \leq l,$$

$$(n, m) \preceq_2 (k, l) \iff n \geq k \wedge m = l.$$

Pokaż, że $\preceq_1, \preceq_2$ *są relacjami częściowego porządku. Czy istnieją w tych porządkach w zbiorze* X *elementy najmniejsze, minimalne, największe, maksymalne? Odpowiedzi uzasadnij i ewentualnie wskaż te elementy.*

Definicja. *Niech X będzie niepustym zbiorem. Rodzinę $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazywamy* ***ciałem,*** *jeśli spełnia następujące warunki*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $\forall_{A \in \mathcal{F}} \; X \setminus A \in \mathcal{F}$;
3. $\forall_{A,B \in \mathcal{F}} \; A \cup B \in \mathcal{F}$.

Dodatkowo, jeśli zamiast warunku 3. zachodzi warunek

3'. $\forall_{A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}} \; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$,

to ciało $\mathcal{F}$ nazywamy ***σ-ciałem.***

Przykład 8. *Niech $X = \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wówczas $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem. Istotnie, mamy*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- *Niech $A \in \mathcal{F}$, tj. $A \subseteq \mathbb{N}$. Wówczas oczywiście $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \mathbb{N}$, zatem $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$;*
- *Niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, tj. $A_n \subseteq \mathbb{N}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy oczywiście $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}$, czyli $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.*

Przykład 9. *Niech $X = \mathbb{N}$ i niech $W = \{1, 2, 3\}$. Rodzina $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}, W, \mathbb{N} \setminus W\}$ jest σ-ciałem. Istotnie, mamy*

- *$\emptyset \in \mathcal{F}$ z definicji rodziny $\mathcal{F}$;*
- *Niech $A \in \mathcal{F}$. Mamy następujące możliwości*
  - *$A = \emptyset$, wtedy $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$, więc $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$;*
  - *$A = \mathbb{N}$, wtedy $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$, więc $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$;*
  - *$A = W$, wtedy $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \setminus W$, więc $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$;*
  - *$A = \mathbb{N} \setminus W$, wtedy $\mathbb{N} \setminus A = W$, więc $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.*
- *Niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest skończona, to mamy tylko następujące możliwości*
  - *jeśli w ciągu $A_1, A_2, \ldots$ występują tylko zbiory puste, to wtedy $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \in \mathcal{F}$;*

– *jeśli w ciągu* $A_1, A_2, \ldots$ *występuje zbiór* $\mathbb{N}$, *wtedy* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$;

– *jeśli w ciągu* $A_1, A_2, \ldots$ *występują zbiór* W *oraz* $\mathbb{N} \setminus W$, *wtedy* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$;

– *jeśli w ciągu* $A_1, A_2, \ldots$ *występują tylko zbiory puste i pojawia się zbiór* W, *wtedy* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = W \in \mathcal{F}$;

– *jeśli w ciągu* $A_1, A_2, \ldots$ *występują tylko zbiory puste i pojawia się zbiór* $\mathbb{N} \setminus W$, *wtedy* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \setminus W \in \mathcal{F}$.

Zadanie 7 (8+7=15 punktów).

a) Niech $X = \mathbb{N}$ *i rozważmy rodzinę*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A - \text{ jest skończony lub } \mathbb{N} \setminus A - \text{ jest skończony}\}.$$

Sprawdzić czy $\mathcal{F}$ *jest ciałem. Czy jest też* σ*-ciałem?*

b) Niech $X = \{a, b, c, d\}$ *i niech* $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$. *Sprawdzić czy* $\mathcal{F}$ *jest ciałem. Czy jest też* σ*-ciałem?*