Szósty Wojewódzki Konkurs Matematyczny „W Świecie Matematyki"
im. prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 17 lutego 2014 r.

1. Suma $-1+4-7+10-13+16-19+\cdots-2005+2008-2011$ jest liczbą

   [ ] ujemną;
   [ ] dodatnią;
   [ ] podzielną przez 3.

2. Niech $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ oraz $x > 0, y > 1, z > 3, t > 7$. Równanie $x+y+z+t = 25$ ma

   [ ] 286 różnych rozwiązań;
   [ ] 715 różnych rozwiązań;
   [ ] tyle samo różnych rozwiązań co równanie $x+y+z+t = 14$, gdzie $x, y, z, t \in \mathbb{N}$.

3. Liczba $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\cdots$

   [ ] jest niewymierna;
   [ ] jest całkowita;
   [ ] jest kwadratem liczby wymiernej.

4. Prawdziwe jest zdanie

   [ ] Liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 200, które nie są podzielne ani przez 2, ani przez 3, jest dokładnie 77;
   [ ] Liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 200, które są podzielne przez 6 lub przez 9, jest dokładnie 55;
   [ ] Liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 200, które są podzielne przez 4 i przez 6 jest dokładnie 16.

5. Na kartce narysowano 30 prostych pionowych i 40 poziomych (prostopadle i w równych odległościach). Na rysunku tym jest

   [ ] 1131 niepodzielnych kwadratów;
   [ ] 342000 prostokątów;
   [ ] 22620 kwadratów.

6. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdą jest

   [ ] $|ctgx| = |\cos x| \cdot \left(\sqrt{1-0,5\cdot(1+\cos 2x)}\right)^{-1}$;
   [ ] $ctg2x = \frac{ctgx - tgx}{2}$;
   [ ] $\sin 4x = 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x$.

7. Trapez wpisany w okrąg

   [ ] musi być równoramienny;
   [ ] może być prostokątny;
   [ ] może nie być równoramienny.

8. Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

   [ ] $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S_n = n^2 - 5n$;
   [ ] $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S_n = n^3 + 1$;
   [ ] $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S_n = n^2 - 5n + 1$.

9. Dla każdego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ rozważmy ciąg geometryczny $\frac{1}{\sin x+\cos x}, \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}, \ldots;$

[ ] Dla kazdego $x \in (0, \pi/2)$, podany ciąg jest malejący;
[ ] Dla dowolnego $x \in (0, \pi/2)$, suma wyrazów tego ciągu wynosi $\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^2 x-\sin x+\cos x-1}$;
[ ] Dla $x = \frac{\pi}{4}$ ciąg ten jest malejący.

10. Liczba $17! + 18! + 19!$ jest podzielna przez

[ ] 18;
[ ] 18^2;
[ ] 19.

11. W zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest zdefiniowane działanie $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób: $x \circ y = xy + x + y$. Wówczas działanie to

[ ] jest łączne;
[ ] jest przemienne;
[ ] ma element neutralny;
[ ] dla $x, y < 0$ mamy $x \circ y < 0$.

Uwaga: elementem neutralnym nazywamy tutaj liczbę $e \in \mathbb{R}$ taką, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \ x \circ e = e \circ x = x$.

12. Ze zbioru cyfr $1, 2, 3, \ldots, 9$ wybieramy losowo bez zwracania 5 cyfr i zapisujemy w kolejności losowania. Na ile dokładnie sposobów można w ten sposób wylosować ciąg monotoniczny

[ ] $\binom{9}{5}$;
[ ] $2 \cdot \binom{9}{5}$;
[ ] $2 \cdot \binom{9}{4}$;
[ ] 256.

13. Okrąg i parabola na płaszczyżnie mogą mieć

[ ] 1 punkt wspólny;
[ ] 2 punkty wspólne;
[ ] 3 punkty wspólne;
[ ] 5 punktów wspólnych.

14. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ jest

[ ] pewien przedział otwarty;
[ ] $[-2, 2)$;
[ ] $[-2, 2]$;
[ ] $[-1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$.

15. Liczba $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jest

[ ] całkowita;
[ ] niewymierna;
[ ] równa 1;
[ ] równa $\sqrt{5}$.

16. Rozważmy w
trzy

16. Rozważmy wielomian $W(x) = x^3 + (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\, x^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})\, x + \sqrt{30}$, który ma trzy pierwiastki. Suma kwadratów jego pierwiastków wynosi

[ ] $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;
[ ] $\sqrt{30}$;
[ ] 0;
[ ] 10.

17. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będą niezerowe. Wówczas

[ ] jeśli f, g są nieparzyste to $f \circ g$ jest parzysta;
[ ] jeśli f, g są parzyste to $f \circ g$ jest parzysta;
[ ] jeśli f jest nieparzysta i g jest parzysta to $f \circ g$ jest parzysta;
[ ] jeśli g jest nieparzysta i f jest parzysta to $f \circ g$ jest parzysta.

Uwaga: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \, (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

18. Niech A, B będą takimi zdarzeniami losowymi, że prawdopodobieństwo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Wówczas

[ ] $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
[ ] $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;
[ ] $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$;
[ ] $P(A' \cup B') = P(A') + P(B')$.

19. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe

[ ] iloczyn dwóch różnych liczb niewymiernych może być liczbą wymierną;
[ ] suma dwóch liczb wymiernych może być niewymierna;
[ ] iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej może być wymierny;
[ ] potęga o podstawie i wykładniku niewymiernym może być wymierna.

20. Tautologią jest zdanie

[ ] $(p \wedge \neg p) \Longrightarrow p$;
[ ] $p \vee \neg p$;
[ ] $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow p)$;
[ ] $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q))$.

21. Rozważmy wielomian $W(x) = \left(\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^{2014}$. Suma współczynników tego wielomianu przy potęgach parzystych wynosi

[ ] 1;
[ ] 0;
[ ] 2014;
[ ] tyle samo co wyraz wolny tego wielomianu.

22. Prawdziwa jest nierówność

[ ] $61^{16} < 18^{24}$;
[ ] $xy + st \leq \sqrt{x^2+s^2} \cdot \sqrt{y^2+t^2}$, dla $x, y, s, t > 0$;
[ ] $x + \frac{1}{x} > 2$, dla $x > 0$;
[ ] $\frac{2-x}{x+1} > 0$, dla $x \in (-2, 2]$.

Definicja. Grafem nieskierowanym nazywamy uporządkowaną parę $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem wierzchołków, zaś E zbiorem krawędzi łączących pewne wierzchołki.

Przykład. Grafem jest para $G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\})$, wierzchołkami grafu G są punkty $\{1,2,3,4\}$ zaś jego krawędziami są odcinki łączące 1 z 2, 2 z 3 i 1 z 3.

23. Niech $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ będzie zbiorem wierzchołków. Różnych grafów o wierzchołkach V jest

[ ] 2^n;
[ ] n^{n-1};
[ ] $2^{\binom{n}{2}}$;
[ ] $n!$.

24. Niech $n \geq 3$ oraz $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Ustalmy trzy wierzcholki $a, b, c \in V$. Różnych grafów o zbiorze wierzchołków V takich, że żadne z punktów a, b, c nie są połączone krawędzią jest

[ ] 2^{n-1};
[ ] $n^{n-1} - n$;
[ ] $2^{\binom{n}{2}-\binom{3}{2}}$;
[ ] $(n-1)!$.

25. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem arytmetycznym

[ ] ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ może być ograniczony;
[ ] ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ może być zbieżny;
[ ] ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zawsze nieograniczony z góry lub z dołu;
[ ] może nie istnieć granica (nawet nieskończona) ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

26. Zbiory A oraz B nazywamy równolicznymi, jeżeli istnieje bijekcja (funkcja różnowartościowa i „na") $f : A \to B$. Równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jest

[ ] zbiór liczb parzystych;
[ ] zbiór liczb niewymiernych;
[ ] zbiór $\mathbb{N} \cup \{\sqrt{k} : k \in \mathbb{N}\}$;
[ ] przedział $(0, 1)$.

27. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Rozważmy dwa równania: $ax^2 + bx + c = 0$ $(*)$ oraz $ax^2 + b|x| + c = 0$ $(\circ)$

[ ] Jeżeli $b^2 - 4ac > 0$ to równanie $(\circ)$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie;
[ ] Równanie $(\circ)$ ma dwa razy więcej rozwiązań niż równanie $(*)$;
[ ] Ujemne rozwiązanie $(*)$ (jeżeli istnieje) nie jest rozwiązaniem $(\circ)$;
[ ] Jeżeli $(*)$ nie ma rozwiązań, to $(\circ)$ nie ma rozwiązań.

28. Przedział postaci (a, b), gdzie $a < b$, nazywamy otwartym, przedział postaci $[a, b]$, gdzie $a < b$, nazywamy domkniętym.

[ ] Różnica dwóch przedziałów otwartych może być przedziałem otwartym;
[ ] Przekrój dwóch przedziałów, które nie są ani otwarte ani domknięte, może być przedziałem domkniętym;
[ ] Niech A, B, C, D będą przedziałami otwartymi. Zbiór $((A \cap (B \setminus A)) \cup D) \setminus [C \setminus D]$ jest albo zbiorem pustym albo sumą skończenie wielu przedziałów otwartych;
[ ] Niech A, B, C, D będą pewnymi przedziałami. Zbiór $(A \cap D) \cap (B \cup C)$ jest albo zbiorem pustym albo sumą skończenie wielu przedziałów.

Uwaga: zbiory jednopunktowe nie traktujemy jako przedziały.

29. Które z poniższych zdań jest prawdziwe

[ ] $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, \exists_{y\in\mathbb{R}}\, \forall_{z\in\mathbb{R}}\ (z < y \Rightarrow z < x)$;

[ ] $\forall_{z\in\mathbb{R}}\, \exists_{x\in\mathbb{R}}\, \exists_{y\in\mathbb{R}}\ (z < y \Rightarrow z < x)$;

[ ] $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x \le x^2$;

[ ] $\exists_{z\in\mathbb{R}}\, \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \big(x < |z| \Rightarrow |x| \le x^2\big)$.

30. Losujemy punkt z koła $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt należy do lewej połowy koła (tzn. $x \le 0$) wynosi $\frac{1}{2}$;

[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt należy do koła o środku w $(0, 0)$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$ wynosi $\frac{1}{2}$;

[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy punkt spoza ustalonego kwadratu wpisanego w to koło wynosi $\frac{\pi-2}{\pi}$;

[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt jest oddalony od środka układu współrzędych o więcej niż $r = \frac{1}{2}$ wynosi $\frac{3}{4}$.