

## **IX Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"**

im. Prof. Włodzimierza Krysińskiego

Etap drugi - 21 lutego 2017 r.

**Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.**

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych” wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

**Zadanie 1 (10 punktów)**

Zaokrąglonym o  $p\%$  kwadratem, gdzie  $p \in [0, 100]$ , nazywamy figurę geometryczną, która powstaje w wyniku wykonania następującego algorytmu:

- (i) Z każdego z czterech boków kwadratu usuwamy dwa odcinki zawarte w tym boku, których jeden koniec znajduje się w wierzchołku kwadratu, zaś jego długość wynosi  $\frac{p}{2}\%$  długości boku kwadratu. W ten sposób otrzymujemy cztery odcinki będące częścią wyjściowego kwadratu.
- (ii) Łączymy ze sobą łukiem (wycinkiem okręgu) cztery pary najbliższych końców odcinków (stanowiących wyjściowo części sąsiednich boków).

W ten sposób otrzymujemy zaokrąglony o  $p\%$  kwadrat. W szczególnym przypadku zaokrąglony o  $0\%$  kwadrat jest kwadratem, a zaokrąglony o  $100\%$  kwadrat jest kołem. Znaleźć obwód i pole powierzchni zaokrąglonego o  $p\%$  kwadratu o boku długości  $a$ . Odpowiedź podać jako funkcje zmiennych  $p$  i  $a$ .

**Zadanie 2 (10 punktów)**

W dwóch urnach znajduje się jednakowa liczb kul. Kule te są całe białe lub całe czarne. Po kolei z każdej z urn losujemy ze zwracaniem  $n$  kul, gdzie  $n > 2$ . Wiadomo, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu  $n$  razy kuli białej z pierwszej urny równe jest prawdopodobieństwu wylosowania z urny drugiej  $n$  razy kuli czarnej lub  $n$  razy kuli białej. Podać wszystkie możliwe wartości  $n$  oraz możliwe zawartości urn pierwszej i drugiej.

**Zadanie 3 (10 punktów)**

Znaleźć równanie krzywej, która składa się z punktów równoodległych od punktu  $(-4, 0)$  oraz okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Zadanie 4 (10 punktów)**

- (a) Dla jakich wartości rzeczywistych  $m$  wielomian  $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$  jest podzielny przez  $x + y + z$ ?
- (b) Wykazać, że jeśli równanie  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to  $p^2 \geq 3q$ .

### Zadanie 5 (13 punktów)

**Definicja 1.** Relacją dwuargumentową w zbiorze  $X$  nazywamy dowolny podzbiór  $\mathcal{R} \subseteq X \times X$  (tj. dowolny zbiór par uporządkowanych o poprzednikach i następnikach ze zbioru  $X$ ). W dalszej części będziemy mówili tylko o relacjach dwuargumentowych nazywając je dla prostoty **relacjami**.

**Przykład.** Klasycznie rozumiana nierówność  $\leq$  jest relacją w zbiorze  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Wobec przyjętej Definicji 1

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$$

(oczywiście utożsamiamy zapis  $(x, y) \in \leq$  z zapisem  $x \leq y$ ).

**Definicja 2.** Relację  $\mathcal{R}$  w zbiorze  $X$  nazywamy **relacją częściowego preporządku**, jeśli jest:

- **zwrotna**, tj.  $x\mathcal{R}x$  dla każdego  $x \in X$ ;
- **przechodnia**, tj. dla wszystkich  $x, y, z \in X$  jeśli  $x\mathcal{R}y$  i  $y\mathcal{R}z$ , to  $x\mathcal{R}z$ .

**Przykład.** Nierówność  $\leq$  w zbiorze  $\mathbb{N}$  jest relacją częściowego preporządku. Istotnie:

- oczywiście dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $n \leq n$ ;
- oczywiście, jeśli  $n, m, k \in \mathbb{N}$  oraz  $n \leq m$  i  $m \leq k$ , to  $n \leq k$ .

**Definicja 3.** Relację częściowego preporządku  $\mathcal{R}$  w zbiorze  $X$  nazywamy **relacją częściowego porządku** jeśli jest **słabo-antysymetryczna**, tj. dla  $x, y \in X$  jeśli  $x\mathcal{R}y$  oraz  $y\mathcal{R}x$ , to  $x = y$ .

**Przykład.** Nierówność  $\leq$  w zbiorze  $\mathbb{N}$  jest relacją częściowego porządku. Istotnie, wiemy już, że jest częściowym preporządkiem oraz oczywiście dla  $n, m \in \mathbb{N}$  jeśli  $n \leq m$  oraz  $m \leq n$ , to  $n = m$ .

**Definicja 4.** Symbolem  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oznaczamy zbiór wszystkich funkcji  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pamiętając, że zwyczajowo funkcje o dziedzinie  $\mathbb{N}$  nazywa się **ciągami**, to zbiór  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  jest, innymi słowy, zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi.

**Definicja 5.** W zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zdefiniujemy relację  $\leq^*$  w następujący sposób: dla  $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  powiemy, że  $f \leq^* g$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $k \in \mathbb{N}$  takie, że  $f(n) \leq g(n)$  dla wszystkich  $n \geq k$  (tj. od pewnego miejsca, oznaczonego numerem  $k$ , wyrazy ciągu  $f$  są mniejsze lub równe odpowiednim wyrazom ciągu  $g$ ).

**Przykład.** (a) dla  $f = (3, 2, 1, 2, 2, 2, \dots), g = (1, 1, 1, 3, 2, 3, 2, \dots)$  mamy, że  $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oraz  $f \leq^* g$  ponieważ dla  $k = 3$  i  $n \geq 3$  mamy  $f(n) \leq g(n)$ ;

(b) dla  $f = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ ,  $g = (2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots)$  mamy, że  $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oraz  $f \not\leq^* g$  i  $g \not\leq^* f$  (mówimy, że elementy  $f$  i  $g$  są **nieporównywalne**).

**Twierdzenie 1.** Relacja  $\leq^*$  w zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  jest relacją częściowego preporządku.

**Definicja 6.** Niech  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Powiemy, że zbiór ten jest **ograniczony z góry**, jeśli istnieje  $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  taka, że dla wszystkich  $g \in A$  mamy  $g \leq^* f$ .

**Przykład.** Zbiór  $A = \{f, g\}$  (gdzie  $f, g$  są z Przykładu (a)) jest ograniczony z góry. Istotnie dla  $h = (3, 3, 3, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  mamy, że  $f \leq^* h$  oraz  $g \leq^* h$ .

### Zadania do wykonania

Wszystkie poniższe zadania należy rozwiązać osobno.

1. (2 punkty) Wykaż, że relacja  $\leq^*$  w zbiorze  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  **nie** jest relacją częściowego porządku, tj. że **nie** jest słabo-antysymetryczna.
2. (3 punkty) Wykaż, że dowolny skończony zbiór  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  jest ograniczony z góry.
3. (3 punkty) Wykaż, że zbiór  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  składający się ze wszystkich ciągów stałych jest ograniczony z góry.
4. (6 punktów) Wykaż, że dla dowolnego  $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  (tj. dla dowolnego przeliczalnego podzbioru zbioru  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ) zbiór  $A$  jest ograniczony z góry.

### Zadanie 6 (14 punktów)

**Definicja 7.** Niech  $n \in \mathbb{N}$ . **Przestrzenią kartezjańską**  $\mathbb{R}^n$  nazywamy zbiór

$$\mathbb{R}^n := \{(v_1, \dots, v_n) : v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Elementy  $\mathbb{R}^n$  nazywamy **wektorami**. Jeżeli  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , to **normą wektora**  $v$  nazywamy liczbę:

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

**Przykład.** (1) Płaszczyzna  $XY$  może być utożsamiana z przestrzenią kartezjańską  $\mathbb{R}^2$ . Istotnie, każdy punkt płaszczyzny  $v$  ma dwie współrzędne  $x, y$ . Możemy więc zapisać  $v = (x, y)$ . W takim przypadku, norma wektora  $\|v\|$  może być interpretowana jako odległość punktu  $v$  od początku układu współrzędnych.

Np.

$$\|(2, 1)\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

(2) Przestrzeń trójwymiarowa  $XYZ$  może być utożsamiona z przestrzenią kartezjańską  $\mathbb{R}^3$ . Istotnie, każdy punkt  $v$  przestrzeni  $XYZ$  ma trzy współrzędne  $x, y, z$ . Możemy więc zapisać  $v = (x, y, z)$ . W takim przypadku, norma wektora  $\|v\|$  również może być interpretowana jako odległość punktu  $v$  od początku układu współrzędnych.

Np.

$$\|(-2, 0, 3)\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

**Definicja 8.** W przestrzeni kartezjańskiej  $\mathbb{R}^n$  wprowadźmy działania **dodawania wektorów** i **mnożenia wektora przez liczbę**: jeżeli  $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  oraz  $a \in \mathbb{R}$ , to definiujemy:

$$v + w := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n),$$

$$av := (av_1, \dots, av_n).$$

**Przykład.**

$$(2, 3, 4, 1) + (-2, 3, 1, 0) = (0, 6, 5, 1),$$

$$3(-1, 2, 0, 1) = (-3, 6, 0, 3).$$

**Uwaga.** Dodawanie wektorów możemy rozszerzyć na większą ich liczbę, np. dla  $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n), u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ , definiujemy:

$$v + w + u := (v_1 + w_1 + u_1, \dots, v_n + w_n + u_n).$$

**Definicja 9.** Niech  $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ . **Iloczynem skalarnym** wektorów  $v, w$  nazywamy liczbę:

$$\langle v|w \rangle := v_1 w_1 + \dots + v_n w_n.$$

**Przykład.** Dla  $v = (1, 2, 3, 0), w = (0, -1, 2, 1)$ , mamy

$$\langle v|w \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4.$$

**Twierdzenie 2.** (podstawowe własności iloczynu skalarnego)

Niech  $v, w, u \in \mathbb{R}^n$  oraz  $a \in \mathbb{R}$ . Wówczas:

- (i)  $\langle v|w \rangle = \langle w|v \rangle$ ;
- (ii)  $\langle v + u|w \rangle = \langle v|w \rangle + \langle u|w \rangle$ ;
- (iii)  $\langle v|w + u \rangle = \langle v|w \rangle + \langle v|u \rangle$ ;
- (iv)  $\langle av|w \rangle = \langle v|aw \rangle = a \langle v|w \rangle$ ;
- (v)  $\langle v|v \rangle = \|v\|^2$ .

**Definicja 10.** (1) Powiemy, że wektory  $v, w \in \mathbb{R}^n$  są **prostopadłe**, jeżeli iloczyn skalarny  $\langle v|w \rangle = 0$ . Piszemy wtedy  $v \perp w$ .

(2) Powiemy, że wektory  $v, w \in \mathbb{R}^n$  są **równoległe**, jeżeli dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$ ,  $v = aw$  lub  $w = av$ . Piszemy wtedy  $v \parallel w$ .

**Uwaga.** W przypadku płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  i przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , prostopadłość wektorów  $v, w$  oznacza prostopadłość odpowiednich odcinków zaczepionych w początku układu współrzędnych i o końcach w punktach, odpowiednio,  $v, w$ . Np. wektory  $(1, 1)$  i  $(-1, 1)$  są prostopadłe w  $\mathbb{R}^2$ .

Podobnie można interpretować zdefiniowane pojęcie równoległości. Np. wektory  $(1, 1)$  i  $(-2, -2)$  są równoległe.

**Twierdzenie 3.** (Twierdzenie Pitagorasa)

Niech  $v, w \in \mathbb{R}^n$  będą prostopadłe. Wówczas:

$$\|v + w\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2}.$$

**Dowód.** Niech  $v, w \in \mathbb{R}^n$  będą prostopadłe. Mamy (poniżej odwołujemy się głównie do warunków z Twierdzenia 2):

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \{\text{war. (v)}\} = \langle v + w|v + w \rangle = \{\text{war. (ii)}\} = \langle v|v + w \rangle + \langle w|v + w \rangle = \\ &= \{\text{war. (iii)}\} = \langle v|v \rangle + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle + \langle w|w \rangle = \end{aligned}$$

$$= \{ \text{prostokąt} v, w \} = \langle v|v \rangle + 0 + 0 + \langle w|w \rangle = \{ \text{war. (v)} \} = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Stąd, wobec nieujemności normy wektorów, mamy

$$\|v + w\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2}$$

□

### Zadania do wykonania

1. (2 punkty) Niech  $v = (-2, 2, 2, 1)$ ,  $u = (0, 1, -3, 4)$ ,  $w = (0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2) \in \mathbb{R}^4$ . Spośród podanych wektorów, wskazać pary wektorów prostopadłych i pary wektorów równoległych. Uzasadnij swój wybór.

2. (2 punkty) Niech  $v = (2, \sqrt{2}, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Wskazać dwa nierównoległe wektory  $u, w \in \mathbb{R}^4$  takie, że  $v \perp u$  oraz  $v \perp w$ . Uzasadnij swój wybór.

3. Wykonać **jedno** z poniższych zadań (będących uogólnieniami twierdzenia Pitagorasa):

Wariant (a) za 3 punkty: Niech  $v, w, u \in \mathbb{R}^n$  będą parami prostopadłe, tj.  $v \perp u$ ,  $v \perp w$ ,  $u \perp w$ . Pokazać, że

$$\|v + w + u\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2 + \|u\|^2}.$$

Wariant (b) za 5 punktów: Niech  $k \in \mathbb{N}$  i niech  $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$  będą parami prostopadłe, tj.  $v^i \perp v^j$  dla  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ . Pokazać, że

$$\|v^1 + \dots + v^k\| = \sqrt{\|v^1\|^2 + \dots + \|v^k\|^2}.$$

4. (5 punktów) Niech  $w, v \in \mathbb{R}^n$  i załóżmy, że  $v \neq (0, \dots, 0)$ . Pokazać, że  $w$  można rozłożyć na sumę dwóch wektorów: prostopadłego do  $v$  i równoległego do  $v$ . Dokładniej, pokazać, że istnieją wektory  $w', w'' \in \mathbb{R}^n$  spełniające następujące warunki:

(i)  $w = w' + w''$ ;

(ii)  $w' \parallel v$ ;

(iii)  $w'' \perp v$ .

Czy wektory  $w'$  i  $w''$  z powyższego przedstawienia są wyznaczone jednoznacznie?

### Zadanie 7 (13 punktów)

**Definicja 11.** Funkcją akumulacji nazywamy niemalejącą funkcję  $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $a(0) = 1$ .

**Uwaga.** Funkcja akumulacji wykorzystywana jest w matematyce finansowej do wyliczania przyszłej wartości, po czasie  $t \geq 0$ , jednej jednostki monetarnej zainwestowanej w chwili 0. Jednostka, w której mierzymy czas, nazywana jest okresem bazowym - może być to na przykład dzień, miesiąc, kwartał lub rok. W praktyce najczęściej korzysta się z funkcji akumulacji postaci  $a(t) = (1 + i)^t$  (oprocentowanie składane), wraz z okresem bazowym równym jeden rok, gdzie  $i$  jest stopą oprocentowania dla jednego okresu bazowego. Jej działanie opiera się na tym, że odsetki za każdy kolejny okres bazowy doliczane są do kwoty kapitału i pracują na kolejne odsetki. Aby obliczyć wartość przyszłą kwoty  $P > 0$  w chwili  $t \geq 0$  wystarczy wyznaczyć  $P \cdot a(t)$ .

**Przykład.** Rozważmy pięcioletnią inwestycję w banku, który oferuje stopę oprocentowania  $i = 5\%$  w skali roku. W chwili 0 wpłacamy na konto kwotę 1000 zł. Zgodnie ze wzorem obliczamy wartość przyszłą:

$$K \cdot a(5) = 1000(1 + 0,05)^5 \approx 1276,28.$$

Wielkość  $(1 + i)$  nazywamy czynnikiem akumulującym.

**Definicja 12.** Dla ustalonej stopy procentowej  $i > 0$  wielkość  $v = \frac{1}{1+i}$  nazywamy współczynnikiem dyskonta.

**Uwaga.** Współczynnik dyskonta jest odwrotnością czynnika akumulacyjnego i służy on do wyznaczenia wielkości kapitału  $P$  jaki należy wpłacić w chwili 0, by po jednym okresie rozliczeniowym uzyskać kwotę  $K > 0$ . Kwota  $P$  wyznaczana jest w oparciu o zależność

$$P = K \cdot v = \frac{K}{1+i}.$$

Istotnie, jeśli w chwili 0 wpłacimy do banku kwotę  $P = \frac{K}{1+i}$ , to po jednym okresie rozliczeniowym jej wartość wynosi

$$P \cdot (1 + i)^1 = P \cdot (1 + i) = \frac{K}{1+i} \cdot (1 + i) = K.$$

**Definicja 13.** Przepływem pieniężnym (*cash-flow*) nazywamy dowolny ciąg  $(CF_k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  (ciąg ten może być skończony lub nie), gdzie  $CF_k$  oznacza wartość przepływu pieniężnego w chwili  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Jeżeli  $CF_k > 0$ , to wówczas w chwili  $k$  wypłacamy z banku wartość  $CF_k$ , zaś jeśli  $CF_k < 0$ , to wpłacamy od banku wartość  $-CF_k$ .



**Przykład.** Rozważmy sytuację, w której pobieramy w chwili  $t = 0$  kredyt w wysokości 1000 zł, a następnie spłacamy go w trzech równych ratach wynoszących po 400 zł w chwilach  $t = 1, 2, 3$ . Wówczas przepływem pieniężnym jest ciąg o wyrazach

$$CF_0 = 1000, CF_1 = -400, CF_2 = -400, CF_3 = -400.$$

**Definicja 14.** Dla ustalonej stopy procentowej  $i > 0$  i ciągu przepływów pieniężnych  $(CF_k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0$ , wartością obecną netto (net present value) inwestycji nazywamy wielkość określoną wzorem

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^n v^k \cdot CF_k,$$

gdzie  $v$  jest współczynnikiem dyskonta. Zapis  $NPV(i)$  oznacza, że wartość obecna netto inwestycji jest liczona przy stopie procentowej  $i$ .

**Przykład.** Rozważmy ponownie przykład. Załóżmy dodatkowo, że  $i = 10\%$ . Wówczas  $v = \frac{1}{1+0,1} = \frac{1}{1,1} = \frac{10}{11}$  oraz

$$\begin{aligned} NPV(i) &= \sum_{k=0}^3 v^k CF_k = v^0 \cdot 1000 + v^1 \cdot (-400) + v^2 \cdot (-400) + v^3 \cdot (-400) \\ &= 1000 - 400 \cdot \frac{10}{11} - 400 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^2 - 400 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^3 \approx 5,26. \end{aligned}$$

**Definicja 15.** Wewnętrzną stopą zwrotu (internal rate of return) odpowiadającą przepływowi pieniężnemu  $(CF_k)$  nazywamy każdą liczbę  $IRR > -1$  taką, że  $NPV(IRR) = 0$ .

**Przykład.** Rozważmy ponownie przykład. Aby wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu z danej inwestycji, należy rozwiązać równanie  $NPV(IRR) = 0$ , tzn.

$$1000 - 400v - 400v^2 - 400v^3 = 0,$$

gdzie  $v = \frac{1}{1+IRR}$ , czyli

$$1000 - \frac{400}{1+IRR} - \frac{400}{(1+IRR)^2} - \frac{400}{(1+IRR)^3} = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie względem  $IRR$  (gdzie  $IRR > -1$ ) znajdujemy wewnętrzne stopy zwrotu. Warto zauważyć, że równanie to może mieć więcej niż jedno rozwiązanie, a więc wewnętrzna stopa zwrotu  $IRR$  nie musi być wyznaczona jednoznacznie.

### Zadania do wykonania

Rozważmy funkcję akumulacji postaci  $a(t) = (1+i)^t$ , gdzie  $i > 0$  oraz  $t \geq 0$ . Rozważmy trzyletnią inwestycję, która generuje następujące przepływy pieniężne:  $CF_0 = -432$  zł,  $CF_1 = 1740$  zł,  $CF_2 = -2300$  zł,  $CF_3 = 1000$  zł.

1. (4 punkty) Wiedząc, że jedna z wewnętrznych stóp zwrotu (IRR) jest równa  $IRR = 25\%$ , wyznaczyć wszystkie wewnętrzne stopy zwrotu.
2. (4 punkty) Wykazać, że funkcja NPV jest funkcją malejącą dla  $v \in (0, 68; 0, 85)$ .
3. (5 punktów) Wyznaczyć maksimum funkcji NPV dla  $i \in \left[\frac{100}{19}\%; \frac{300}{7}\%\right]$ .