O matematyce rankingów
Twierdzenie Perrona-Frobeniusa, Google i koszykówka

Wojciech Kryszewski

Politechnika Łódzka

27 lutego 2020

Rankingi

Ranking Liceów Ogólnokształcących 2018

2018	NAZWA SZKOŁY	MIEJSCOWOŚĆ	WOJEWÓDZTWO	2017	2016	2015	Wskaźnik 2018	Olimpiady 30%	MATURA Przedmioty obowiązkowe 25%	MATURA Przedmioty dodatkowe 45%
251	II LO z Oddz. Dwujęz. im. Marii Konopnickiej	Katowice	śląskie	221	230	265	46,08	0,43	82,17	49,55
251	X Liceum Ogólnokształcące im. Królowej Jadwigi	Warszawa	mazowieckie	276	256	500+	46,08	0,00	83,03	49,36
253	I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika	Kołobrzeg	zachodniopom.	229	172	204	46,03	0,51	77,88	51,77
254	II LO im. Stanisława Wyspiańskiego	Legnica	dolnośląskie	212	190	147	45,95	0,00	81,48	49,95
255	LO nr I im. mjra Henryka Sucharskiego	Kępno	wielkopolskie	251	215	84	45,94	0,00	84,09	48,47
256	Samorządowe Liceum Ogólnokształcące w ZSO nr 2	Stalowa Wola	podkarpackie	223	199	206	45,92	0,00	79,46	51,00
257	Liceum Ogólnokształcące im. KEN	Stalowa Wola	podkarpackie	234	221	264	45,87	0,39	79,38	50,69
258	I Liceum Ogólnokształcące im. Juliusza Słowackiego	Częstochowa	śląskie	449	369	500+	45,86	3,82	76,51	49,98
259	Liceum Ogólnokształcące STO	Człuchów	pomorskie	400	451	469	45,85	1,49	76,54	51,49
260	II Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego	Sopot	pomorskie	184	260	267	45,82	1,40	85,12	46,72
260	LO Towarzystwa Szkolnego im. Mikołaja Reja	Bielsko-Biała	śląskie	188	287	122	45,82	4,05	76,41	49,79
262	III LO im. Alfreda Lityńskiego	Suwałki	podlaskie	328	244	146	45,81	0,38	84,46	47,76
263	II LO im. gen. Władysława Andersa	Chojnice	pomorskie	279	264	296	45,79	0,09	82,72	48,87
264	IV Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza	Warszawa	mazowieckie	361	338	216	45,72	0,00	83,43	48,40
265	VII Liceum Ogólnokształcące im. Zofii Nałkowskiej	Kraków	małopolskie	270	294	321	45,68	0,00	85,79	46,99
266	Liceum Ogólnokształcące im. St. Wyspiańskiego	Kęty	małopolskie	259	262	356	45,58	0,00	88,10	45,50

liceow.jpg


szachowy.jpg

- Zwycięstwo 1 pkt;
- przegrana 0 pkt;
- remis 1/2 pkt.

szachowy.jpg

- Zwycięstwo 1 pkt;
- przegrana 0 pkt;
- remis 1/2 pkt.

6 zawodników: A, B, C, D, E i F. Oto wyniki:

	A	B	C	D	E	F	Uzyskany wynik
A	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	1	$4\frac{1}{2}$
B	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$2\frac{1}{2}$
C	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$4\frac{1}{2}$
D	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$1\frac{1}{2}$
E	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$
F	0	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

szachowy.jpg

Zauważmy, że:

- Zawodnik D (najgorszy) wygrał A (najlepszym);
- Wynik uzyskany przez D nie uwzględnia rangi pokonanych przeciwników;
- A i C uzyskali tę sama liczbę punktów, choć A wygrał z C.

Konkluzja: Czy raczej nie należy porównywać zawodników parami?

6 zawodników: A, B, C, D, E i F. Oto wyniki:

	A	B	C	D	E	F	Uzyskany wynik
A	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	1	$4\frac{1}{2}$
B	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$2\frac{1}{2}$
C	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$4\frac{1}{2}$
D	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$1\frac{1}{2}$
E	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$
F	0	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

szachowy.jpg

Zauważmy, że:

- Zawodnik D (najgorszy) wygrał A (najlepszym);
- Wynik uzyskany przez D nie uwzględnia rangi pokonanych przeciwników;
- A i C uzyskali tę sama liczbę punktów, choć A wygrał z C.

Konkluzja: Czy raczej nie należy porównywać zawodników parami?

6 zawodników: A, B, C, D, E i F. Oto wyniki:

	A	B	C	D	E	F	Uzyskany wynik
A	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	1	$4\frac{1}{2}$
B	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$2\frac{1}{2}$
C	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$4\frac{1}{2}$
D	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$1\frac{1}{2}$
E	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$
F	0	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

szachowy.jpg

Zauważmy, że:
• Zawodnik D (najgorszy) wygrał A (najlepszym);
• Wynik uzyskany przez D nie uwzględnia rangi pokonanych przeciwników;
• A i C uzyskali tę sama liczbę punktów, choć A wygrał z C.

Konkluzja: Czy raczej nie należy porównywać zawodników parami?

Season	Most Valuable Player	Ranking
1991-92	Michael Jordan	1
1992-93	Charles Barkley	5
1993-94	Hakeem Olajuwon	2
1994-95	David Robinson	1
1995-96	Michael Jordan	1
1996-97	Karl Malone	1
1997-98	Michael Jordan	5
1999-00	Shaquille O'Neal	1
2000-01	Allen Iverson	13
2001-02	Tim Duncan	1
2002-03	Tim Duncan	1
2003-04	Kevin Garnett	1
2004-05	Steve Nash	15
2005-06	Steve Nash	10
2006-07	Dirk Nowitzki	3
2007-08	Kobe Bryant	5

Nie zawsze ,,najbardziej wartościowy zawodnik"jest pierwszy w rankingu!

• Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).
Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant \ldots$.
Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

• Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)
Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

Ranking: Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

• Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).
Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant \ldots$.
Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

• Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)
Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

Ranking: Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

• Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).
Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant \ldots$.
Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

• Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)
Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

Ranking: Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

Porównania parami i rankingi

- Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).
Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant \ldots$.
Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

- Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)
Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

Ranking: Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

Porównania parami i rankingi

• Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).
Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant \ldots$.
Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

• Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)
Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

Ranking: Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

Macierz stanowi wygodny sposób zapisu różnych danych

Przykład

Trzech studentów s_1, s_2, s_3 uczestniczy w czterech sprawdzianach 1,2,3,4. Następująca macierz opisuje otrzymane wyniki (stopnie):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Podobną macierz można sporządzić, gdy studentów jest n, zaś sprawdzianów m.

Macierz stanowi wygodny sposób zapisu różnych danych

Przykład

Trzech studentów s_1, s_2, s_3 uczestniczy w czterech sprawdzianach 1,2,3,4. Następująca macierz opisuje otrzymane wyniki (stopnie):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Podobną macierz można sporządzić, gdy studentów jest n, zaś sprawdzianów m.

Ogólnie mówiąc macierzą $(n \times m)$ (macierzą o n wierszach i m kolumnach), gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nazwiemy wyrażenie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots,m}};$$

wyraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$ stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, $1 = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

- Macierz kwadratowa: $n = m$;
- dodatnia lub nieujemna $a_{ij} > 0$ lub $a_{ij} \geqslant 0$ dla wszystkich i, j.

Ogólnie mówiąc macierzą $(n \times m)$ (macierzą o n wierszach i m kolumnach), gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nazwiemy wyrażenie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots,m}};$$

wyraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$ stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, $1 = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

- Macierz kwadratowa: $n = m$;
- dodatnia lub nieujemna $a_{ij} > 0$ lub $a_{ij} \geqslant 0$ dla wszystkich i, j.

Ogólnie mówiąc macierzą $(n \times m)$ (macierzą o n wierszach i m kolumnach), gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nazwiemy wyrażenie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots,m}};$$

wyraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$ stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, $1 = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

- Macierz kwadratowa: $n = m$;
- dodatnia lub nieujemna $a_{ij} > 0$ lub $a_{ij} \geqslant 0$ dla wszystkich i, j.

Interesować nas będą przede wszystkim macierze kwadratowe. Wśród macierzy kwadratowych ważną rolę pełni tzw. macierz jednostkowa

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Wektory

Szczególnym przypadkiem są n-wymiarowe wektory, tzn. macierze o n-wierszach i jednej kolumnie, a więc wymiaru $(n \times 1)$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Piszemy też $x = [x_1, \ldots, x_n]$ pamiętając, że wektory mają zawsze postać kolumnową.

- Wektor dodatni lub nieujemny: $x_i > 0$ ($x_i \geqslant 0$) dla wszystkich i.

Wektory

Szczególnym przypadkiem są n-wymiarowe wektory, tzn. macierze o n-wierszach i jednej kolumnie, a więc wymiaru $(n \times 1)$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Piszemy też $x = [x_1, \dots, x_n]$ pamiętając, że wektory mają zawsze postać kolumnową.

- Wektor dodatni lub nieujemny: $x_i > 0$ ($x_i \geqslant 0$) dla wszystkich i.

Szczególnym przypadkiem są n-wymiarowe wektory, tzn. macierze o n-wierszach i jednej kolumnie, a więc wymiaru $(n \times 1)$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Piszemy też $x = [x_1, ..., x_n]$ pamiętając, że wektory mają zawsze postać kolumnową.

- Wektor dodatni lub nieujemny: $x_i > 0$ $(x_i \geqslant 0)$ dla wszystkich i.

Macierze tych samych wymiarów można dodawać lub odejmować: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to sumą lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Macierze można mnożyć przez liczby: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Na przykład (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Macierze tych samych wymiarów można dodawać lub odejmować: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to sumą lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Macierze można mnożyć przez liczby: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Na przykład (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

W szczególności, jeśli $x = [x_1, x_2, .., x_n]$, $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ są wektorem, to

$$\lambda x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$x \pm y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}$$

Macierze A, B wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. iloczyn Cauchy'ego, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

• W szczególności, dla macierzy kwadratowej (wymiaru $(n \times n)$) można mówić o potędze: dla $k \geqslant 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot .... \cdot A}_{k}; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

• Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Macierze A, B wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. iloczyn Cauchy'ego, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

• W szczególności, dla macierzy kwadratowej (wymiaru $(n \times n)$ można mówić o potędze: dla $k \geqslant 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot .... \cdot A}_{k}; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

• Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Macierze A, B wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. iloczyn Cauchy'ego, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

• W szczególności, dla macierzy kwadratowej (wymiaru $(n \times n)$ można mówić o potędze: dla $k \geqslant 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot .... \cdot A}_{k}; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

• Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Wynikiem mnożenia macierzy A przez x (w tej kolejności) jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \cdot x,$$

gdzie

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m, \end{cases}$$

tzn

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wynikiem mnożenia macierzy A przez x (w tej kolejności) jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \cdot x,$$

gdzie

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m, \end{cases}$$

tzn

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{12} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistą wartością własną macierzy A, jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

- Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x.$$

- Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać różne wektory własne (nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób).

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots n\\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistą wartością własną macierzy A, jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

• Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha\lambda x = \lambda\alpha x.$$

• Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać różne wektory własne (nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób).

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistą wartością własną macierzy A, jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

• Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x.$$

• Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać różne wektory własne (nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób).

Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektora x

$$A \cdot x = \lambda x \iff (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

oraz

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektora x

$$A \cdot x = \lambda x \iff (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

oraz

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Równość $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_1 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0; \end{cases}$$

• liczba λ jest wartością własną macierzy $A \iff$ układ równań ma niezerowe rozwiązanie, tzn. istnieją liczby $x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq 0$ dla jakiegoś i) spełniające układ (wektor $x = [x_1, \dots x_n]$ będzie wektorem własnym). Twierdzenie Kroneckera-Capelliego mówi, że układ ma rozwiązanie $\iff$ wyznacznik $\det(A - \lambda I_n)$ jest równy zero.

• Definicję wyznacznika macierzy można znaleźć w każdym podręczniku tzw. algebry liniowej. Dla przykładu

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Równość $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_1 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0; \end{cases}$$

• liczba λ jest wartością własną macierzy $A \iff$ układ równań ma niezerowe rozwiązanie, tzn. istnieją liczby $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \neq 0$ dla jakiegoś i) spełniające układ (wektor $x = [x_1, \ldots x_n]$ będzie wektorem własnym). Twierdzenie Kroneckera-Capelliego mówi, że układ ma rozwiązanie $\iff$ wyznacznik $\det(A - \lambda I_n)$ jest równy zero.

• Definicję wyznacznika macierzy można znaleźć w każdym podręczniku tzw. algebry liniowej. Dla przykładu

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Równość $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_1 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0; \end{cases}$$

• liczba λ jest wartością własną macierzy $A \iff$ układ równań ma niezerowe rozwiązanie, tzn. istnieją liczby $x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq 0$ dla jakiegoś i) spełniające układ (wektor $x = [x_1, \dots x_n]$ będzie wektorem własnym). Twierdzenie Kroneckera-Capelliego mówi, że układ ma rozwiązanie $\iff$ wyznacznik $\det(A - \lambda I_n)$ jest równy zero.

• Definicję wyznacznika macierzy można znaleźć w każdym podręczniku tzw. algebry liniowej. Dla przykładu

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Chcąc znaleźć (rzeczywiste) wartości własne macierzy A trzeba rozwiązać (względem niewiadomej λ) równanie

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Są też inne metody.

• Wyrażenie $\det(A - \lambda I_n)$ jest wielomianem zmiennej λ; mamy do czynienia z równaniem n-tego stopnia. Równania takie mają *co najwyżej* n pierwiastków rzeczywistych (oraz dokładnie n pierwiastków zespolonych).

Chcąc znaleźć (rzeczywiste) wartości własne macierzy A trzeba rozwiązać (względem niewiadomej λ) równanie

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Są też inne metody.

• Wyrażenie $\det(A - \lambda I_n)$ jest wielomianem zmiennej λ; mamy do czynienia z równaniem n-tego stopnia. Równania takie mają *co najwyżej* n pierwiastków rzeczywistych (oraz dokładnie n pierwiastków zespolonych).

Nie każda macierz ma rzeczywiste wartości własne.

Przykład

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

nie ma rzeczywistych wartości własnych: $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$. Rzeczywiście

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2.$$

Równanie $\lambda^2 + 2 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych (oraz dwa pierwiastki zespolone $\pm i\sqrt{2}$) .

Promień spektralny

Dla macierzy $A = [a_{ij}]$, dla których $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ określa się tzw. promień spektralny

$$r(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)\}.$$

Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda + \lambda^2.$$

Zatem wartości własne są pierwiastkami równania $\lambda^2 + \lambda = 0$, tj. $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. W konsekwencji promień spektralny $r(A) = 1$.

Promień spektralny

Dla macierzy $A = [a_{ij}]$, dla których $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ określa się tzw. promień spektralny

$$r(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)\}.$$

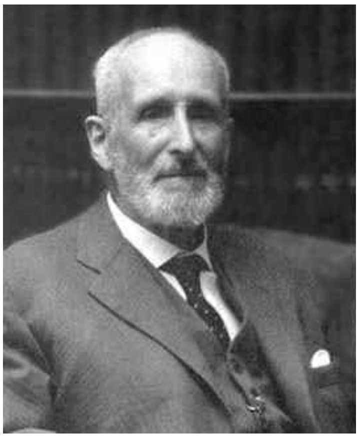
Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Zatem wartości własne są pierwiastkami równania $\lambda^2 + \lambda = 0$, tj. $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$. W konsekwencji promień spektralny $r(A) = 1$.



Oskar Perron
(1880 – 1975)

Georg Frobenius
(1849 – 1917)

Twierdzenie (Perrona)

Jeśli macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ *jest nieujemna, to* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ *oraz promień spektralny jest (rzeczywistą) wartością własną, tzn.* $r(A) \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$*, której odpowiada nieujemny wektor własny* $x = [x_1, \dots, x_n]$*, tzn.*

$$A \cdot x = r(A)x$$

.

Wadą twierdzenie Perrona jest to, że wektor własny x odpowiadający promieniowi spektralnemu nie jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do czynnika rzeczywistego).

Twierdzenie (Perrona)

Jeśli macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,...,n}$ *jest nieujemna, to* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ *oraz promień spektralny jest (rzeczywistą) wartością własną, tzn.* $r(A) \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$*, której odpowiada nieujemny wektor własny* $x = [x_1, ..., x_n]$*, tzn.*

$$A \cdot x = r(A)x$$

.

Wadą twierdzenie Perrona jest to, że wektor własny x odpowiadający promieniowi spektralnemu nie jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do czynnika rzeczywistego).

Macierze nieredukowalne

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.

• Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

• Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

• Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.

• Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

• Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

• Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

Macierze nieredukowalne

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.
• Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.
• Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

• Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

Macierze nieredukowalne

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.
- Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.
- Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

- Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.
• Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.
• Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

• Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, \ldots, x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, $x_1 + \ldots + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

Macierze nieredukowalne

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.

- Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.
- Definicja jest inna; podany warunek jest równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

- Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie (Perrona-Frobeniusa)

Jeśli macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest wartością własną o dodatnim wektorze własnym x.
W szczególności istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $A \cdot x = r(A)x$.
Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

Macierze stochastyczne

- Macierz nieujemna $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest (kolumnowo) stochastyczna, gdy suma współczynników z każdej kolumny jest równa 1, tzn. dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Przykład

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

jest (kolumnowo) stochastyczna.

Fakt

Jeśli macierz A jest (kolumnowo) stochastyczna, to $r(A) = 1$.

Macierze stochastyczne

- Macierz nieujemna $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest (kolumnowo) stochastyczna, gdy suma współczynników z każdej kolumny jest równa 1, tzn. dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Przykład

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

jest (kolumnowo) stochastyczna.

Fakt

Jeśli macierz A jest (kolumnowo) stochastyczna, to $r(A) = 1$.

Wniosek

Niech macierz A będzie stochastyczna i nieredukowalna. Wtedy $r(A) = 1 \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ i istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że

$$A \cdot x = x, \quad x_1 + ... + x_n = 1 \text{ oraz } x_i > 0 \text{ dla } i = 1, ..., n.$$

Dodatkowo metoda potęgowa pozwala wyliczyć

$$x = \frac{1}{k} \lim_{k \to \infty} A^k \cdot e,$$

gdzie $e = [1, 1, ..., 1]$. Szybkość tej zbieżności można dokładnie oszacować.

Wniosek

Niech macierz A będzie stochastyczna i nieredukowalna. Wtedy $r(A) = 1 \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ *i istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny* $x = [x_1, ..., x_n]$ *tzn. taki, że*

$$A \cdot x = x, \quad x_1 + ... + x_n = 1 \text{ oraz } x_i > 0 \text{ dla } i = 1, ..., n.$$

Dodatkowo metoda potęgowa pozwala wyliczyć

$$x = \frac{1}{k} \lim_{k\to\infty} A^k \cdot e,$$

gdzie $e = [1, 1, ..., 1]$*. Szybkość tej zbieżności można dokładnie oszacować.*

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa wraz powyższym wnioskiem pozwala więc na znalezienie dodatniego stochastycznego wektora własnego dla dowolnej nieredukowalnej nieujemnej macierzy stochastycznej przy pomocy zbieżnej i stabilnej metody numerycznej (metody „potęgowej"). Jest on wyznaczony jednoznacznie.

Przykład

Dla macierzy stochastycznej

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

z poprzedniego przykładu obliczamy

$$x = [1/4, 3/8, 3/8].$$

Obliczenia te można przeprowadzić „ręcznie" (rozwiązując odpowiedni układ równań). Metoda potęgowa ma zastosowanie, gdy wymiar macierzy n jest dużą liczbą.

Rankingi spektralne

• M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy „urody” (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.

• J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy sa ważone (obiekt może być „znacznie ładniejszy” lub wynik (a nie tylko kto wygrał) meczy powinien się liczyć. Jak to zrobić?

• T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

• wielu innych i wreszcie...

GOOGLE: L. Page; S. Brin

• M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy „urody'' (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.

• J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy sa ważone (obiekt może być „znacznie ładniejszy'' lub wynik (a nie tylko kto wygrał) meczy powinien się liczyć. Jak to zrobić?

• T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

• wielu innych i wreszcie...

GOOGLE: L. Page; S. Brin

- M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy „urody” (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.

- J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy sa ważone (obiekt może być „znacznie ładniejszy” lub wynik (a nie tylko kto wygrał) meczy powinien się liczyć. Jak to zrobić?

- T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

- wielu innych i wreszcie...

GOOGLE: L. Page; S. Brin

- M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy „urody” (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.

- J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy sa ważone (obiekt może być „znacznie ładniejszy” lub wynik (a nie tylko kto wygrał) meczy powinien się liczyć. Jak to zrobić?

- T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

- wielu innych i wreszcie...

GOOGLE: L. Page; S. Brin

• M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy „urody” (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.

• J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy sa ważone (obiekt może być „znacznie ładniejszy” lub wynik (a nie tylko kto wygrał) meczy powinien się liczyć. Jak to zrobić?

• T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

• wielu innych i wreszcie...

GOOGLE: L. Page; S. Brin

Dlaczego pewne strony internetowe pojawiają się od razu w wyszukiwarce, a pewnych trzeba szukać i szukać?

Sergey Brin
(1973 –)

Larry Page
(1973 –)

Dlaczego pewne strony internetowe pojawiają się od razu w wyszukiwarce, a pewnych trzeba szukać i szukać?

Sergey Brin
(1973 –)

Larry Page
(1973 –)

Omówimy tę metodę przykładowo dla sieci składającej się z 5 stron (na prawdę w sieci jest ich ponad pół miliarda: 644 275 754)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

Strukturę połączeń ilustruje następujący graf:

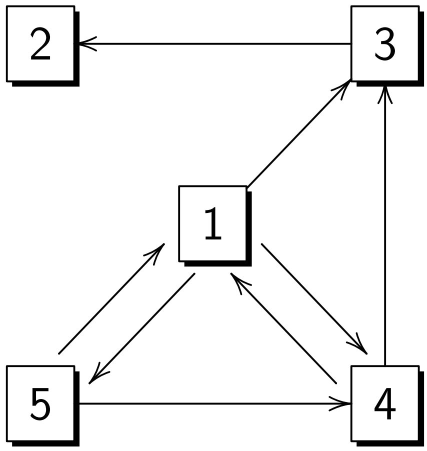
Graf połączeń sieci

Obecność strzałki $\boxed{j} \to \boxed{i}$ oznacza, że ze strony $\boxed{j}$ wychodzi link do strony $\boxed{i}$.

Omówimy tę metodę przykładowo dla sieci składającej się z 5 stron (na prawdę w sieci jest ich ponad pół miliarda: 644 275 754)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

Strukturę połączeń ilustruje następujący graf:



Graf połączeń sieci

Obecność strzałki $\boxed{j} \to \boxed{i}$ oznacza, że ze strony $\boxed{j}$ wychodzi link do strony $\boxed{i}$.

- Tworzymy macierz $G = [g_{ij}]_{i,j=1,\dots,5}$ w następujący sposób: dla $i, j = 1, 2, \dots, 5$

$$g_{ij} = 1 \iff \text{istnieje link ze strony } \boxed{j} \text{ do strony } \boxed{i}.$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czasem te macierz tworzy się nieco inaczej, nadając określoną „wartość” istniejącym linkom.

- Tworzymy macierz $G = [g_{ij}]_{i,j=1,\dots,5}$ w następujący sposób: dla $i, j = 1, 2, \dots, 5$

$$g_{ij} = 1 \iff \text{istnieje link ze strony } \boxed{j} \text{ do strony } \boxed{i}.$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czasem te macierz tworzy się nieco inaczej, nadając określoną „wartość" istniejącym linkom.

- Dla $j = 1, ..., 5,$

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij};$$

c_j jest więc liczbą linków wychodzących ze strony $\boxed{j}$.

$$c_1 = 3, \ c_2 = 0, \ c_3 = 1, \ c_4 = 2, \ c_5 = 2.$$

- Dla $i, j = 1, ..., 5,$

$$p_{ij} = \frac{g_{ij}}{c_j}.$$

Liczba p_{ij} jest prawdopodobieństwem, że ze strony $\boxed{j}$ pójdziemy do strony $\boxed{i}$.

- Dla $j = 1, \ldots, 5$,

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij};$$

c_j jest więc liczbą linków wychodzących ze strony $\boxed{j}$.

$$c_1 = 3, \; c_2 = 0, \; c_3 = 1, \; c_4 = 2, \; c_5 = 2.$$

- Dla $i, j = 1, \ldots, 5$,

$$p_{ij} = \frac{g_{ij}}{c_j}.$$

Liczba p_{ij} jest prawdopodobieństwem, że ze strony $\boxed{j}$ pójdziemy do strony $\boxed{i}$.

Tworzymy macierz połączeń

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (Pomysł: Seeley, Wei) Jeśli dla każdego $j = 1, ..., n$ przypiszemy „hipotetyczną” wartość w_j stronie $\boxed{j}$, to wartość w_i, $i = 1, ..., n$, musi spełniać zależność

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j.$$

Wartość w_i strony $\boxed{i}$ jest zależna od wartości w_j wszystkich stron, z których można dojść do niej dojść oraz od pr-stwa, że z nich się do niej wychodzi.

Tworzymy macierz połączeń

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (Pomysł: Seeley, Wei) Jeśli dla każdego $j = 1, \ldots, n$ przypiszemy „hipotetyczną" wartość w_j stronie $\boxed{j}$, to wartość w_i, $i = 1, \ldots, n$, musi spełniać zależność

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j.$$

Wartość w_i strony $\boxed{i}$ jest zależna od wartości w_j wszystkich stron, z których można dojść do niej dojść oraz od pr-stwa, że z nich się do niej wychodzi.

Tworzymy macierz połączeń

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

• (Pomysł: Seeley, Wei) Jeśli dla każdego $j = 1, \ldots, n$ przypiszemy „hipotetyczną" wartość w_j stronie $\boxed{j}$, to wartość w_i, $i = 1, \ldots, n$, musi spełniać zależność

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j.$$

Wartość w_i strony $\boxed{i}$ jest zależna od wartości w_j wszystkich stron, z których można dojść do niej dojść oraz od pr-stwa, że z nich się do niej wychodzi.

W zapisie macierzowym musi zachodzić

$$P \cdot w = w \ \text{ gdzie } \ w = [w_1, ..., w_n].$$

Eureka!!: nieznany wektor wartości przypisanych stronom jest wektorem własnym macierzy połączeń.

Istnienie i znajomość wektora w (który jest wektorem własnym o wartości własnej równej 1) umożliwia dokonanie rankingu: po prostu należy uszeregować jego współczynniki w porządku malejącym.

- Istnienie wektora w (wektora własnego o wartości własnej równej promieniowi spektralnemu $r(P)$) gwarantuje twierdzenie Perrona (macierz P jest nieujemna), lecz nie wiadomo czy $r(P) = 1$ i czy wektor ten jest wyznaczony jednoznacznie.

W zapisie macierzowym musi zachodzić

$$P \cdot w = w \text{ gdzie } w = [w_1, ..., w_n].$$

Eureka!!: nieznany wektor wartości przypisanych stronom jest wektorem własnym macierzy połączeń.

Istnienie i znajomość wektora w (który jest wektorem własnym o wartości własnej równej 1) umożliwia dokonanie rankingu: po prostu należy uszeregować jego współczynniki w porządku malejącym.

- Istnienie wektora w (wektora własnego o wartości własnej równej promieniowi spektralnemu $r(P)$) gwarantuje twierdzenie Perrona (macierz P jest nieujemna), lecz nie wiadomo czy $r(P) = 1$ i czy wektor ten jest wyznaczony jest jednoznacznie.

W zapisie macierzowym musi zachodzić

$$P \cdot w = w \quad \text{gdzie} \quad w = [w_1, ..., w_n].$$

Eureka!!: nieznany wektor wartości przypisanych stronom jest wektorem własnym macierzy połączeń.

Istnienie i znajomość wektora w (który jest wektorem własnym o wartości własnej równej 1) umożliwia dokonanie rankingu: po prostu należy uszeregować jego współczynniki w porządku malejącym.

• Istnienie wektora w (wektora własnego o wartości własnej równej promieniowi spektralnemu $r(P)$) gwarantuje twierdzenie Perrona (macierz P jest nieujemna), lecz nie wiadomo czy $r(P) = 1$ i czy wektor ten jest wyznaczony jest jednoznacznie.

Macierz P jest „prawie” (kolumnowo) stochastyczna, bo dla dowolnego $j = 1, \ldots, 5$: jeśli ze strony $\boxed{j}$ wychodzą jakieś linki, to zachodzi

$$\sum_{i=1}^{5} p_{ij} = 1.$$

Problem stanowią strony „wiszące” (tzw. *tangling*). W naszej sieci strona $\boxed{2}$ jest „wisząca”. Jeżeli $\boxed{j}$ jest stroną „wiszącą”, to $c_j = 0$; wobec tego $p_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, 5$.

Żeby móc użyć twierdzenie Perrona-Frobeniusa trzeba więc zapewnić stochastyczność i nieredukowalność macierzy połączeń P.

Macierz P jest „prawie" (kolumnowo) stochastyczna, bo dla dowolnego $j = 1, \dots, 5$: jeśli ze strony $\boxed{j}$ wychodzą jakieś linki, to zachodzi

$$\sum_{i=1}^{5} p_{ij} = 1.$$

Problem stanowią strony „wiszące" (tzw. *tangling*). W naszej sieci strona $\boxed{2}$ jest „wisząca". Jeżeli $\boxed{j}$ jest stroną „wiszącą", to $c_j = 0$; wobec tego $p_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, 5$.

Żeby móc użyć twierdzenie Perrona-Frobeniusa trzeba więc zapewnić stochastyczność i nieredukowalność macierzy połączeń P.

Macierz P jest „prawie" (kolumnowo) stochastyczna, bo dla dowolnego $j = 1, ..., 5$: jeśli ze strony $\boxed{j}$ wychodzą jakieś linki, to zachodzi

$$\sum_{i=1}^{5} p_{ij} = 1.$$

Problem stanowią strony „wiszące" (tzw. *tangling*). W naszej sieci strona $\boxed{2}$ jest „wisząca". Jeżeli $\boxed{j}$ jest stroną „wiszącą", to $c_j = 0$; wobec tego $p_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1, ..., 5$.

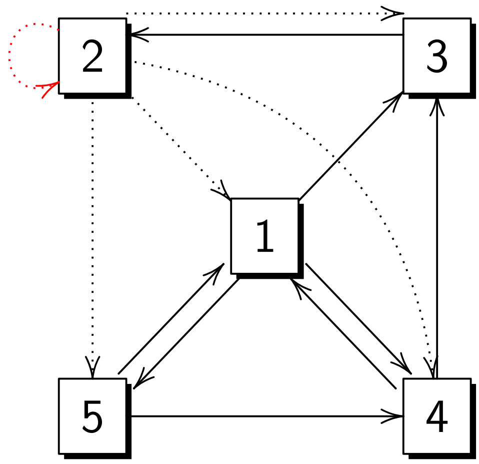
Żeby móc użyć twierdzenie Perrona-Frobeniusa trzeba więc zapewnić stochastyczność i nieredukowalność macierzy połączeń P.

I modyfikacja: Kolumnę zer zastępuje się kolumną $[1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5]$ i otrzymuje zmodyfikowaną macierz połączeń

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uzasadnienie: Jeśli jesteśmy na „wiszącej" stronie $\boxed{j}$, to aby wyjść losowo podajemy adres URL jednej ze stron sieci oraz z pr-stwem 1/5 znajdziemy się na jednej z 5 dostępnych stron (niewykluczone, że na tej samej). Innymi słowy dodajemy „wirtualne" linki prowadzące od wiszącej strony $\boxed{2}$ do wszystkich innych.

Otrzymujemy tym sposobem „wirtualny” graf połączeń (linki wirtualne są wykropkowane):



Zmodyfikowany graf połączeń sieci

Jego macierzą połączeń jest $\overline{P}$. Jest ona stochastyczna, nieujemna, więc z twierdzenia Perrona ma ona wektor własny o wartości własnej $r(\overline{P}) = 1$. Nie jest on jednak jeszcze wyznaczony jednoznacznie.

II modyfikacja Użytkownik, który znalazł się na dowolnej stronie wybierze z pr-stwem $\alpha \in (0,1)$ link z wirtualnego grafu połączeń lub wybierze z prawdopodobieństwem $(1-\alpha)$ jakiś nowy (spośród dostępnych) adres URL (każda z 5 stron wybrane zostanie z pr-stwem $\frac{1}{5}(1-\alpha)$.

Powstanie wtedy nowa macierz połączeń

$$R = \alpha \overline{P} + (1-\alpha)E$$

gdzie

$$E = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \end{bmatrix}$$

Powstała ostatecznie macierz rankingowa R jest oczywiście stochastyczna, jest też dodatnia, a więc nieredukowalna. Można więc skorzystać z twierdzenia Perrona-Frobeniusa i stwierdzić istnienie wektora rankingowego w takiego, że $R \cdot w = w$.

II modyfikacja Użytkownik, który znalazł się na dowolnej stronie wybierze z pr-stwem $\alpha \in (0, 1)$ link z wirtualnego grafu połączeń lub wybierze z prawdopodobieństwem $(1 - \alpha)$ jakiś nowy (spośród dostępnych) adres URL (każda z 5 stron wybrane zostanie z pr-stwem $\frac{1}{5}(1 - \alpha)$.
Powstanie wtedy nowa macierz połączeń

$$R = \alpha \overline{P} + (1 - \alpha) E$$

gdzie

$$E = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \end{bmatrix}$$

Powstała ostatecznie macierz rankingowa R jest oczywiście stochastyczna, jest też dodatnia, a więc nieredukowalna. Można więc skorzystać z twierdzenia Perrona-Frobeniusa i stwierdzić istnienie wektora rankingowego w takiego, że $R \cdot w = w$.

II modyfikacja Użytkownik, który znalazł się na dowolnej stronie wybierze z pr-stwem $\alpha \in (0, 1)$ link z wirtualnego grafu połączeń lub wybierze z prawdopodobieństwem $(1 - \alpha)$ jakiś nowy (spośród dostępnych) adres URL (każda z 5 stron wybrane zostanie z pr-stwem $\frac{1}{5}(1 - \alpha)$.
Powstanie wtedy nowa macierz połączeń

$$R = \alpha \overline{P} + (1 - \alpha)E$$

gdzie

$$E = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/5 & 1/5 & \dots & 1/5 \end{bmatrix}$$

Powstała ostatecznie macierz rankingowa R jest oczywiście stochastyczna, jest też dodatnia, a więc nieredukowalna. Można więc skorzystać z twierdzenia Perrona-Frobeniusa i stwierdzić istnienie wektora rankingowego w takiego, że $R \cdot w = w$.

Google używa $\alpha = 0,85$. Przy takim doborze mamy

$$R = \begin{bmatrix} 3/100 & 1/5 & 3/100 & 91/200 & 91/200 \\ 3/100 & 1/5 & 22/25 & 3/100 & 3/100 \\ 47/150 & 1/5 & 3/100 & 91/200 & 3/100 \\ 47/150 & 1/5 & 3/100 & 3/100 & 91/200 \\ 47/150 & 1/5 & 3/100 & 3/100 & 3/100 \end{bmatrix}.$$

Z wniosku do twierdzenia Perrona-Frobeniusa R ma ona *dokładnie jeden* dodatni i stochastyczny wektor własny (wystarczy około 50 iteracji w metodzie potęgowej)

$$w = [0,21; 0,255; 0,213; 0,189; 0,133]$$

Kolejne współczynniki są „wartością" kolejnych stron. Zatem ranking naszej sieci wygląda następująco:

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

O dziwo najbardziej „wartościowa" okazała się „wisząca" strona $\boxed{2}$.

W rzeczywistości sieci internetowe składają się z milionów stron i milionów połączeń. Ale idea poszukiwania macierzy rankingowej R i jej wektora własnego w pozostaje niezmieniona. Oczywiście obliczenia wymagają ogromnych zasobów obliczeniowych (jakkolwiek są on proste i o niewielkiej złożoności obliczeniowej). Jak powiedział Clive Moler (twórca MatLaba) „PageRank stanowi największe na świecie obliczenia macierzowe”.

Ranking drużyn koszykarskich

Jednym z pierwszych matematyków, którzy opracowali metody sportowe rankingowe był J. Keener. Bez wątpienia algorytm Keenera z roku 1993 zainspirował twórców Googla, zaś ich PageRank dał nową, bardzo skuteczną metodę rankingową. Omówimy ją na prostym przykładzie.

James Keener (1952 –)

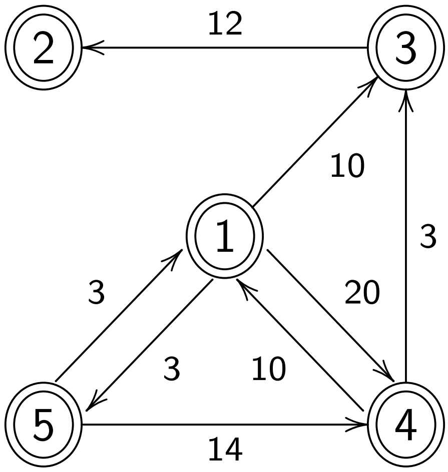
Rozważmy 5 drużyn koszykarskich:

oraz następujący graf ilustrujący przebieg rozgrywek (w określonym momencie)

Graf wygranych w lidze piłkarskiej

Rozważmy 5 drużyn koszykarskich:

oraz następujący graf ilustrujący przebieg rozgrywek (w określonym momencie)



Graf wygranych w lidze piłkarskiej

Zapis $2 \xleftarrow{12} 3$ oznacza, że w rozgrywkach drużyna 3 straciła 12 punktów z drużyną 2. Brak strzałki oznacza, że dane drużyny ze sobą nie grały. Jak łatwo zobaczyć graf rozgrywek różni się od grafu połączeń sieci tylko tym, że każda ze strzałek opatrzona jest teraz „wynikiem” meczu.

Tworzymy macierz „wynikową” rozgrywek wymiaru (5×5) w następujący sposób: dla $i, j = 1, 2, .., 5$,

$$w_{ij} = \text{wartość przegranej drużyny } j \text{ z drużyną } i.$$

Zapis $2 \xleftarrow{12} 3$ oznacza, że w rozgrywkach drużyna 3 straciła 12 punktów z drużyną 2. Brak strzałki oznacza, że dane drużyny ze sobą nie grały. Jak łatwo zobaczyć graf rozgrywek różni się od grafu połączeń sieci tylko tym, że każda ze strzałek opatrzona jest teraz „wynikiem'' meczu.

Tworzymy macierz „wynikową'' rozgrywek wymiaru (5×5) w następujący sposób: dla $i, j = 1, 2, .., 5$,

$$w_{ij} = \text{wartość przegranej drużyny } j \text{ z drużyną } i.$$

Otrzymujemy macierz

$$W = [w_{ij}] = \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

z której również odczytujemy, że na przykład drużyna 3 „dostała" (czyli wygrała) od drużyny 4 3 punkty, zaś drużyna 4 wygrała 20 punktami z drużyną 1.

Niech

$$c_j = \sum_{i=1}^{5} w_{ij}, \quad j = 1, \ldots, 5.$$

Jest to liczba straconych punktów przez drużynę j. W naszym przypadku

$$c_1 = 33, \; c_2 = 0, \; c_3 = 12, \; c_4 = 13, \; c_5 = 17.$$

Następnie tworzymy macierz

$$P = [p_{ij}]_{i,j=1,\ldots,5}, \quad p_{ij} = \frac{w_{ij}}{c_j} \text{ dla } i,j = 1, \ldots, 5,$$

to znaczy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10/13 & 3/17 \\ 0 & 0 & 12/12 & 0 & 0 \\ 10/33 & 0 & 0 & 3/13 & 0 \\ 20/33 & 0 & 0 & 0 & 14/17 \\ 3/33 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech

$$c_j = \sum_{i=1}^{5} w_{ij}, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Jest to liczba straconych punktów przez drużynę j. W naszym przypadku

$$c_1 = 33, \; c_2 = 0, \; c_3 = 12, \; c_4 = 13, \; c_5 = 17.$$

Następnie tworzymy macierz

$$P = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,5}, \quad p_{ij} = \frac{w_{ij}}{c_j} \;\text{ dla }\; i,j = 1, \dots, 5,$$

to znaczy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10/13 & 3/17 \\ 0 & 0 & 12/12 & 0 & 0 \\ 10/33 & 0 & 0 & 3/13 & 0 \\ 20/33 & 0 & 0 & 0 & 14/17 \\ 3/33 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogiczne jak poprzednio dokonujemy dwóch modyfikacji:

I modyfikacja W kolumnie odpowiadającej drużynie, która nie straciła punktów) wpisujemy 1/5 i otrzymujemy macierz

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 10/13 & 3/17 \\ 0 & 1/5 & 12/12 & 0 & 0 \\ 10/33 & 1/5 & 0 & 3/13 & 0 \\ 20/33 & 1/5 & 0 & 0 & 14/17 \\ 3/33 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uzasadnienie Niezwyciężona drużyna 2 „mogła” przegrać z każdą z innych drużyn z prawdopodobieństwem 1/5.

Analogiczne jak poprzednio dokonujemy dwóch modyfikacji:

I modyfikacja W kolumnie odpowiadającej drużynie, która nie straciła punktów) wpisujemy 1/5 i otrzymujemy macierz

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 10/13 & 3/17 \\ 0 & 1/5 & 12/12 & 0 & 0 \\ 10/33 & 1/5 & 0 & 3/13 & 0 \\ 20/33 & 1/5 & 0 & 0 & 14/17 \\ 3/33 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uzasadnienie Niezwyciężona drużyna 2 „mogła” przegrać z każdą z innych drużyn z prawdopodobieństwem 1/5.

II modyfikcja Rozważamy macierz

$$R = \alpha\overline{P} + (1-\alpha)E,$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$ oraz

$$E = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 & v_3 & v_3 \\ v_4 & v_4 & v_4 & v_4 & v_4 \\ v_5 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 \end{bmatrix}, \ v_1 + v_2 + \ldots + v_5 = 1,$$

Tutaj w wektorze $v = [v_1, \ldots, v_5]$ liczba v_i, $i = 1, \ldots, 5$, uwzględnia „jakość" drużyny i (wartość zawodników, liczbę kontuzji, okoliczności rozgrywek, dane statystyczne z wcześniejszych rozgrywek itp). Tym samym α jest wagą z jaką na ranking wpływa macierz rozgrywek, zaś $(1-\alpha)$ – wagą z jaką oddziałuje wektor v.

II modyfikcja Rozważamy macierz

$$R = \alpha\overline{P} + (1-\alpha)E,$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$ oraz

$$E = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 & v_3 & v_3 \\ v_4 & v_4 & v_4 & v_4 & v_4 \\ v_5 & v_5 & v_5 & v_5 & v_5 \end{bmatrix}, \ v_1 + v_2 + \ldots + v_5 = 1,$$

Tutaj w wektorze $v = [v_1, \ldots, v_5]$ liczba v_i, $i = 1, \ldots, 5$, uwzględnia „jakość" drużyny i (wartość zawodników, liczbę kontuzji, okoliczności rozgrywek, dane statystyczne z wcześniejszych rozgrywek itp). Tym samym α jest wagą z jaką na ranking wpływa macierz rozgrywek, zaś $(1-\alpha)$ – wagą z jaką oddziałuje wektor v.

Otrzymana macierz R jest dodatnia i stochastyczna. Zatem – ponownie wykorzystując twierdzenie Perrona-Frobeniusa – można znaleźć jej wektor własny w o wartości własnej równej 1 (tzn. równej promieniowi spektralnemu macierzy R), tzn. $R \cdot w = w$.

Kładąc $\alpha = 0,85$ oraz $v = [1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5]$ dostaniemy (po zastosowaniu metody potęgowej), że

$$w = [0,249;\ 0,223;\ 0,183;\ 0,257;\ 0,087].$$

Tym samym mamy następujący ranking

4 1 2 3 5

Otrzymana macierz R jest dodatnia i stochastyczna. Zatem – ponownie wykorzystując twierdzenie Perrona-Frobeniusa – można znaleźć jej wektor własny w o wartości własnej równej 1 (tzn. równej promieniowi spektralnemu macierzy R), tzn. $R \cdot w = w$.

Kładąc $\alpha = 0,85$ oraz $v = [1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5]$ dostaniemy (po zastosowaniu metody potęgowej), że

$$w = [0,249;\ 0,223;\ 0,183;\ 0,257;\ 0,087].$$

Tym samym mamy następujący ranking

4 1 2 3 5

Przy tym samym α, lecz biorąc $v = [8/30, 10/30, 6/30, 1/30, 4/30]$ otrzymamy

$$w = [0,25;\ 0.248;\ 0,183;\ 0,238;\ 0,082],$$

a zatem ranking wygląda inaczej:

1 2 4 3 5

Jak widać dobór v odgrywa niebagatelną rolę.

Literatura

1. Amy N. Langville & Carl D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press 2006

2. Carl D. Meyer: *Matrix Algebra and Applied Linear Algebra*, SIAM 2004.

+ ogromne zasoby internetu

Dzięki za uwagę !

Literatura

1. Amy N. Langville & Carl D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press 2006

2. Carl D. Meyer: *Matrix Algebra and Applied Linear Algebra*, SIAM 2004.

+ ogromne zasoby internetu

Dzięki za uwagę !

Literatura

1. Amy N. Langville & Carl D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press 2006

2. Carl D. Meyer: *Matrix Algebra and Applied Linear Algebra*, SIAM 2004.

+ ogromne zasoby internetu

Dzięki za uwagę !