Wiad. Mat. 54 (2) 2018, 155–175

Wojciech Kryszewski (Łódź)

Twierdzenie Perrona–Frobeniusa, Google i tenis

Matematyka użyteczna jest piękna,
a piękna matematyka jest użyteczna

1. Wstęp

W ostatnim w 2018 roku numerze *Newsweeka* ukazał się wywiad z Agnieszką Radwańską, naszą najlepszą jak dotąd tenisistką, przeprowadzony przez Pawła Reszkę, który w komentarzu redakcyjnym napisał: „Po sukcesie na małym Wimbledonie do startu zapraszają ją organizatorzy warszawskiego J&S Cup (...). Odpada dopiero w ćwierćfinale, ale urywa seta Jelenie Dementiewej (9. w rankingu!). Od tej pory ekspresem mknie na szczyt. Styczeń 2005 roku – 941. miejsce w rankingu WTA. Grudzień 2006 – jest 57! W 2007 roku ma 26. miejsce. W 2008 r. wdziera się do pierwszej dziesiątki".

Imponujący awans: w ciągu niespełna 3 lat o więcej niż 900 pozycji w rankingu światowego tenisa! Tego typu zawrotne kariery widzi się też w innych dyscyplinach sportu i nie tylko. Wszędzie tam, gdzie ma miejsce rywalizacja (również niebezpośrednia, jak na przykład w przypadku czasopism, które rywalizują o czytelnika, lub partii politycznych, które zabiegają o sympatie wyborców) pojawiają się porównania dokonań, spadki w rankingach i spektakularne wzrosty. Czy po to, aby awansować z 900-tego miejsca do pierwszej dziesiątki Radwańska musiała pokonać 900 rywalek? Nie! Musiałaby toczyć zwycięskie pojedynki codziennie przez 3 lata. Jak tego zatem dokonała? Należy też zapytać, jak tworzy się wiarygodne rankingi tenisistów, tekstów lub czasopism naukowych bądź stron internetowych?

2. Rankingi

Należy rozróżnić charakter i metodologię w sporządzaniu list, w których porównuje się i liczbowo wartościuje dokonania sportowców, działalność przedsiębiorstw etc. poprzez ich uszeregowanie wedle określonych kryteriów, tzn., mówiąc językiem matematyki, ustalenie (liniowego) porządku. W języku angielskim funkcjonują dwa słowa: *standings* and *ranking*. Pierwsze z nich dotyczy zestawień: na przykład liczby wyborców deklarujących wybór konkretnej partii politycznej lub kandydata na prezydenta, wysokości spożycia kawy w różnych krajach itp. To, oczywiście, generuje porządek: możemy na przykład dowiedzieć się (ku swemu zdumieniu), że najwięcej kawy pije się w... Finlandii, a Włochy nie znalazły się nawet w pierwszej dziesiątce. Aby były wiarygodne, listy takie muszą być oczywiście odpowiednio normalizowane: czym innym jest na przykład ogólna liczba cytowań artykułów w danych czasopiśmie, a czym innym jego *impact factor* (IF); podobnie inaczej wygląda ogólne spożycie kawy (tu Włochy przodują), a inaczej jej spożycie *per capita*.

Drugie z określeń dotyczy raczej sposobu ustalania porządku w wyniku określenia relacji pomiędzy obiektami. Różnicę między takimi listami można zilustrować poprzez konfrontację dwóch „rankingów": w jednym podajemy liczbę pralek wyprodukowanych przez określonych producentów sprzętu AGD, w drugim uwzględniamy jakość ich produktów określoną poprzez staranną analizę porównawczą.

Tak więc, mimo że najprościej byłoby wykorzystać pomysł, wedle którego o wartości zawodnika mówi liczba wygranych przez niego pojedynków, to nie o taki „ranking" chodzi. Tak, jak ocena wartości artykułu naukowego tylko za pomocą liczby cytowań, tak mierzenie wartości tenisistki liczbą wygranych przez nią setów nie jest racjonalne. Wygrana w stu meczach z kiepskimi przeciwniczkami nie może równać się z wygraną jednego spotkania z klasową rywalką. Znaczenie ma nie liczba wygranych, lecz jakość pokonanych rywali.

3. Ranking spektralny

Idea rankingu, o której mówimy, jest stara. Już w średniowieczu istniały rankingi sławnych rycerzy i ich dokonań w turniejach rycerskich. Ale dopiero w 1939 roku opublikowano pierwszą pracę autorstwa statystyków angielskich M. G. Kendalla i B. Babingtona Smitha (zob. [12]) na temat rankingów sporządzanych za pomocą ścisłych metod matematycznych. Analizują oni n obiektów z punktu widzenia wspólnej cechy, powiedzmy „urody”. Porównanie dokonywane jest w parach (tzw. *paired comparison*): dla każdej pary (i, j) określamy $a_{ij} = 1$, jeżeli obiekt i jest „ładniejszy” niż obiekt j oraz $a_{ij} = 0$, gdy obiekt i jest „brzydszy” niż j. W ten sposób powstaje macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, tzw. *macierz preferencji*. Mocno upraszczając, uważa się, że kryterium w rankingu „urody” jest znormalizowany wektor[1] sum wierszy, czyli wektor $\mathbf{w} = \|\mathbf{Ae}\|^{-1}\mathbf{Ae}$, przy czym $\mathbf{e} = [1, 1, \ldots, 1]^\top$ jest wektorem o n współrzędnych równych 1, a $\|\cdot\|$ oznacza (tu i poniżej) ℓ^1-normę (a więc $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$), natomiast dla dowolnej macierzy $\mathbf{B}$, symbolem $\mathbf{B}^\top$ oznaczamy macierz do niej transponowaną. W tej sytuacji i-tą współrzędną w_i wektora $\mathbf{w}$ jest $\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\right)^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}$, „najładniejszy” jest zaś obiekt i, którego „miara urody” w_i jest największa. Metoda ta jest dalece niedoskonała; gwoli sprawiedliwości należy dodać, że autorzy nie ograniczyli się tylko do niej.

Istotnego postępu w *spektralnej teorii rankingów* dokonał w 1949 roku John R. Seeley [28], który podczas analiz kwestii socjometrycznych zauważył, że Kendall i Smith nie biorą pod uwagę tego, że podczas porównania pary (i, j) jeden z obiektów może być „znacznie ładniejszy”. Innymi słowy uznał, że osądy powinny być ważone. „Miara urody” w_i obiektu i powinna być znormalizowaną sumą miar urody obiektów uznanych za brzydsze od i – tak więc $\mathbf{w} = \mathbf{Aw}$. Aby zapewnić istnienie *punktu stałego* $\mathbf{w}$, należało dokonać pewnych sensownych modyfikacji. Kolejnymi krokami były: w 1952 roku rozprawa Wei [32], który systematycznie badał rankingi sportowe stosując teorię Perrona–Frobeniusa oraz w 1953 roku artykuł Katza [10]. Do dokładniejszego omówienia podejścia Wei i Katza wrócimy jeszcze dalszym ciągu.

W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych ubiegłego wieku pewną (dręczącą nas do dziś) karierę zrobiła bibliometria, tzn. praktyka oceny działalności naukowej za pomocą tzw. *indeksu cytowań*. Upatruje ona w liczbie cytowań podstawowego czynnika wartościującego osiągnięcia naukowe. Protagonistą tej metody był Eugene Garfield, lingwista i informatyk z Uniwersytetu w Pensylwanii, ale przede wszystkim biznesmen, twórca współczynnika *impact factor* oraz „listy filadelfijskiej”, założyciel Institute for Scientific Information (ISI), znanego dziś jako Thomson-Reuters ISI; obecnie własność korporacji Clarivate Analytics[2]. ISI publikuje listę cytowań Science Citation Index (SCI), listę Journal Citation Reports (JCR) podającą IF czasopism naukowych i bardzo

[1] Wektory w $\mathbb{C}^n$ utożsamiamy z macierzami wymiaru $n \times 1$.

[2] O dokonaniach Garfielda można przeczytać w jego przeglądowym artykule [7]. Pisze on tam ze specyficzną dozą autoironii: „I had considered as an alternative title for my talk *Citation Sanity and Insanity – the Obsession and Paranoia of Citations and Impact Factors*. Others might have preferred *Uses and Abuses of Impact Factors*.”

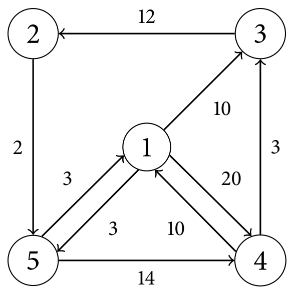
kontrowersyjną listę Highly Cited Researchers (zob. https://hcr.clarivate.com). Bez wątpienia (i niestety) bibliometria przyczyniła się do rozwoju technik rankingowych, na czele ze znanym PageRank, w większym stopniu niż badania Kendalla–Smitha, Seeleya, Wei i Katza.

Ich prace znane były garstce specjalistów. Stąd podejście spektralne do rankingu było jeszcze kilkakrotnie i niezależnie odkrywane. Duże znaczenie miała poświęcona scientometrii (czyli pogłębionej metodologii bibliometrii Garfielda) praca Pinskiego i Narina [24] z 1976 roku, w której mamy do czynienia ze spójną i niemal w pełni rozwiniętą spektralną teorią rankingów, oraz ważne prace z 1977 roku [25, 26] Saaty'ego, autora do dziś często stosowanej techniki Analytic Hierarchy Process (AHP) służącej organizacji, analizie i wartościowaniu danych w celu podejmowania optymalnych decyzji. Zwięzły opis teorii rankingu można znaleźć w [31].

4. Rankingi sportowe

Wyniki Kendalla, Smitha i Wei znalazły kontynuację w pracy Keenera [11] z 1993 roku na temat rankingów drużyn amerykańskiej ligi futbolowej. Rankingi sportowe napotykają na wiele trudności: nierówną liczbę rozegranych spotkań, rozstrzelone wyniki, brak porządku liniowego w zestawieniach wyników (gracz A wygrywa z B, B wygrywa z C, który wygrywa z A), możliwy brak bezpośrednich spotkań pewnych zawodników (szczególnie w sportach, w których brak rywalizacji ligowej, na przykład w tenisie).

Dla przykładu rozważmy pięciu tenisistów, ponumerowanych od 1 do 5, oraz graf ilustrujący przebieg ich rywalizacji (w określonym przedziale czasowym), w którym strzałka z liczbą a_{ij} od zawodnika o numerze j do zawodnika



o numerze i oznacza, że j-ty zawodnik stracił a_{ij} setów z i-tym zawodnikiem. Brak strzałki oznacza, że dani zawodnicy ze sobą nie grali. Tworzymy „wynikową" (5×5) macierz referencyjną $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 5}$, przy czym a_{ij} oznacza wartość przegranej j-tego zawodnika z i-tym. Macierz A ma zatem postać

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech $c_j = \sum_{i=1}^{5} a_{ij}$ będzie liczbą setów straconych przez j-tego zawodnika w spotkaniach z innymi. W naszym przypadku $c_1 = 33$, $c_2 = 2$, $c_3 = 12$, $c_4 = 13$, $c_5 = 17$. Następnie tworzymy macierz „znormalizowaną"

$$\mathbf{P} = \left[p_{ij}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 5}, \quad p_{ij} = \frac{a_{ij}}{c_j} \text{ dla } i, j = 1, \ldots, 5,$$

to znaczy

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10\ 13 & 3\ 17 \\ 0 & 0 & 12\ 12 & 0 & 0 \\ 10\ 33 & 0 & 0 & 3\ 13 & 0 \\ 20\ 33 & 0 & 0 & 0 & 14\ 17 \\ 3\ 33 & 2\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Z tej macierzy (kolumnowo) stochastycznej odczytujemy na przykład, że pierwszy z zawodników wygrał 10 13 ogólnej liczby setów przegranych przez czwartego zawodnika. Jeśli każdemu zawodnikowi przypiszemy „hipotetyczną" wartość w_j, przy czym $j = 1, \ldots, 5$, to

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j.$$

We wzorze tym w_i zależy od wartości w_j wszystkich zawodników, z którymi i wygrał, a także od (procentowych) wysokości wygranych p_{ij}. W zapisie macierzowym zachodzi równość

$$\mathbf{Pw} = \mathbf{w}, \text{ przy czym } w = \left[w_1, \ldots, w_n\right]^{\mathsf{T}}. \tag{2}$$

Znajomość wektora **w** (który, jak widzimy, jest wektorem własnym macierzy **P** o wartości własnej równej 1) umożliwia dokonanie rankingu: po prostu należy uszeregować jego współrzędne w porządku malejącym.

Istotną kwestią jest dobór macierzy referencyjnej **A**. Zamiast powyższego rozwiązania można, w tzw. *modelu uproszczonym*, przyjąć, że $a_{ij} = 1$, gdy i wygrał z j, $a_{ij} = 0$ – gdy przegrał oraz $a_{ij} = 1\ 2$, gdy miał miejsce remis. Niezłym rozwiązaniem jest przyjęcie, że $a_{ij} = s_{ij}\ \left(s_{ij} + s_{ji}\right)$, przy czym s_{ij} jest liczbą punktów zdobytych przez i w spotkaniu z j, natomiast s_{ji} jest liczbą punktów zdobytych przez j w tym spotkaniu. Keener rozważa jeszcze inne sposoby definiowania macierzy **A**. Jest jasne, że od tego sposobu zależy wektor **w** rankingu.

Niewątpliwie jednak zasadniczym problemem jest istnienie rozwiązania równania (2).

5. Teoria Perrona–Frobeniusa

Macierze nieujemne i ich własności spektralne odgrywają ważną rolę w różnych zastosowaniach, na przykład – jak widzieliśmy – w teorii rankingu. Teorię, którą opiszemy poniżej, zapoczątkowały prace Oscara Perrona [22, 23] z 1905 i 1907 roku i Ferdinanda Georga Frobeniusa [4, 5] z 1912 roku.

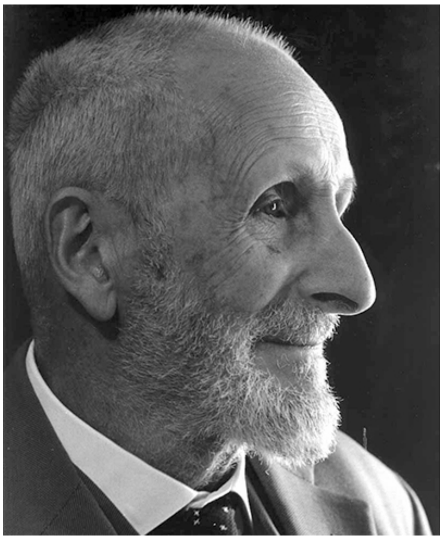
Perron (1880–1975) studiował w Berlinie, Tybindze i Getyndze, doktoryzował się w 1906 roku w Monachium pod opieką Carla von Lindemanna (tego samego, który wykazał m.in., że π jest liczbą przestępną), pracował w Heidelbergu, a po I wojnie światowej objął profesurę w Monachium, gdzie pracował przez resztę życia. Jego zainteresowania i osiągnięcia dotyczyły teorii macierzy, algebry, analizy, równań różniczkowych, teorii liczb i ułamków łańcuchowych. Był człowiekiem niezwykle energicznym, prowadził intensywne badania do końca życia: wystarczy wspomnieć, że osiemnaście spośród jego dwustu osiemnastu prac powstało po ukończeniu przez niego 84 roku życia.

Frobenius (1849–1917) studiował i doktoryzował się w Berlinie pod opieką Karla Weierstrassa; był profesorem w ETH w Zurychu i uniwersytetu w Berlinie. Jest uważany za jednego z głównych, obok Cayleya, Sylvestera i Weierstrassa, twórców algebraicznej teorii macierzy, a jego zainteresowania dotyczyły też teorii grup i algebr, równań różniczkowych i teorii liczb.

Twierdzenia dowiedzione przez Perrona w latach 1907 i 1908 dotyczyły wartości i wektorów własnych macierzy dodatnich i znalazły uogólnienie w pracach Frobeniusa na temat macierzy nieujemnych. Zapewne ani Perron, ani Frobenius nie mogli przewidzieć, jak szerokie zastosowania mieć będą ich wyniki – wrócimy jeszcze poniżej do tej kwestii. W tym miejscu, nawiązując do motta niniejszego artykułu, zacytujmy Meyera, który w książce [20] (zob. też [9]) napisał:

> Oprócz swojej użyteczności, teoria Perrona–Frobeniusa jest elegancka. Potwierdza to, że piękna matematyka prędzej czy później staje się użyteczna, a użyteczna matematyka prędzej czy później uzyskuje piękną postać.

Mówimy, że macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n}$ jest *dodatnia* i piszemy $\mathbf{A} > 0$ (odpowiednio *nieujemna*, $\mathbf{A} \geqslant 0$), gdy $a_{ij} > 0$ (odpowiednio $a_{ij} \geqslant 0$) dla wszystkich i, j. *Widmem* macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (będziemy




Oscar Perron i Georg Frobenius

mówić wyłącznie o rzeczywistych macierzach kwadratowych stopnia większego niż jeden) nazywamy zbiór $\sigma(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0\}$, przy czym $\mathbf{I}$ jest $(n \times n)$-macierzą jednostkową; elementy widma nazywa się *wartościami własnymi*. Oczywiście widmo składa się z n liczb zespolonych, które mogą się powtarzać. *Promieniem spektralnym macierzy* $\mathbf{A}$ jest liczba $r(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$. Jeśli $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, to jądro $N(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq \{0\}$ i istnieje taki niezerowy *wektor własny* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, że $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$; parę $(\lambda, \mathbf{v})$ nazywa się *parą własną* macierzy $\mathbf{A}$. Wektory własne o wartości własnej λ (wraz z zerem) tworzą podprzestrzeń liniową $V_\lambda(\mathbf{A})$, tzw. *przestrzeń własną*, której wymiar $m_g(\lambda)$ jest *krotnością geometryczną* λ. *Krotnością algebraiczną* $m_a(\lambda)$ nazywa się krotność λ, jako pierwiastka równania charakterystycznego $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Oczywiście $m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$.

Poniższe wyniki stanowią wierzchołek góry lodowej i pokazują, jak bogata i ciężka gatunkowo jest teoria Perrona–Frobeniusa. Tylko jej część ma bezpośrednie zastosowanie w teorii rankingu, reszta jest dopełnieniem. Prezentacja nie ma niestety charakteru w pełni „chrono-logicznego” (ustalenie chronologii i autorstwa wyników nie jest całkiem możliwe, a brak dowodów pozwala na odstępstwo od *stricte* logicznego porządku).

Twierdzenie (Perrona)**.** *Jeśli macierz* $A = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *jest dodatnia, to:*

1° $r := r(\mathbf{a}) > 0$, $r \in \sigma(\mathbf{A})$ *oraz* $m_a(r) = 1$, 2° *istnieje dokładnie jedna para własna* (*tzw.* para Perrona) $(r, \mathbf{p})$ *macierzy* $\mathbf{A}$, *gdzie* $\mathbf{p} > 0$ *i* $\|\mathbf{p}\| = 1$,

3° *jeśli* $(\mu, \mathbf{w})$ *jest parą własną macierzy* $\mathbf{A}$ *oraz* $\mathbf{w} \geqslant 0$, *to* $\mu = r$ *i* $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ *dla pewnego* $\alpha > 0$.

Dowód twierdzenia Perrona (poza stwierdzeniem dotyczącym krotności i punktu 3°) nie jest trudny. Istnienie wektora własnego $\mathbf{p}$ odpowiadającego r wynika z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Takie uproszczone twierdzenie Perrona brzmi następująco:

Wniosek. *Jeśli* $\mathbf{A} \geqslant 0$, *to* $r = r(\mathbf{A})$ *i jest wartością własną* $\mathbf{A}$, *której odpowiada nieujemny wektor własny.*

Ten fakt bywa często ilustracją zastosowania twierdzenia Brouwera; dowód wykorzystujący twierdzenie Banacha o punkcie stałym podano w artykule [13]. Ciekawe, że również twierdzenie Brouwera wynika (w bardzo niebanalny sposób) z twierdzenia Perrona (zob. [27]).

Twierdzenie Perrona jest prawdziwe przy założeniu, że macierz $\mathbf{A}$ jest *pierwotna* (ang. *primitive*), tzn. $\mathbf{A} \geqslant 0$ oraz istnieje taka liczba $m \in \mathbb{N}$, że $\mathbf{A}^m > 0$ (m-ta potęga macierzy $\mathbf{A}$); wystarczy zauważyć, że $\sigma(\mathbf{A}^m) = \{\lambda^m : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$. Oczywiście macierze dodatnie są pierwotne, lecz nie na odwrót.

Przypomnijmy, że *widmem peryferycznym* jest zbiór $\pi(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) : |\lambda| = r(\mathbf{A})\}$.

Twierdzenie (o widmie peryferycznym)**.** *Jeśli* $\mathbf{A} \geqslant 0$ *i* $a_{ii} > 0$ *dla wszystkich* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *to* $\pi(\mathbf{A}) = \{r(\mathbf{A})\}$. *W szczególności widmo peryferyczne macierzy pierwotnej jest jednopunktowe.*

Twierdzenie Perrona nie jest na ogół prawdziwe dla macierzy nieujemnych (na przykład dla macierzy $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$); widmo peryferyczne macierzy nieujemnych nie musi być jednopunktowe (na przykład macierz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ ma dwupunktowe widmo peryferyczne). Zainspirowało to Frobeniusa, który potrafił dostrzec istotę różnicy pomiędzy macierzami $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Dla pierwszej macierzy twierdzenie Perrona jest słuszne, dla drugiej zaś nie. Różnica polega na tym, że pierwsza macierz „miesza" osie płaszczyzny, podczas gdy druga zachowuje oś y.

Powiadamy, że macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (niekoniecznie nieujemna) jest *redukowalna* (ang. *reducible*), jeżeli istnieje taki podukład $\{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ układu $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ wersorów osi, przy czym $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, dla którego $\mathbf{A}\mathbf{e}_{i_j} \in \operatorname{lin}\{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ przy dowolnym $j \in \{1, \ldots, k\}$. Macierz jest *nieredukowalna*, gdy nie jest redukowalna.

Widać, że nieredukowalność zależy tylko od położenia zer w macierzy; macierze dodatnie są nieredukowalne. Nieredukowalność macierzy **A** jest więc równoważna nieredukowalności tzw. *macierzy połączeń* $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{i\leqslant i,j\leqslant n}$ skojarzonej z **A**, przy czym $q_{ij} = 1$, gdy $a_{ij} \neq 0$ i $q_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Stąd wynika, że macierz **A** jest redukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz permutacji **P**, że $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{AP} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}\end{smallmatrix}\right]$, przy czym **X**, **Z** są macierzami kwadratowymi.

Jeśli z macierzą **A** powiążemy graf zorientowany $\mathbf{G_A}$ o wierzchołkach $1, \ldots, n$, w którym z wierzchołka j prowadzi droga do wierzchołka i, o ile $a_{ij} \neq 0$, to macierz **A** jest, jak łatwo wykazać, nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy graf $\mathbf{G_A}$ jest *spójny*, tzn. z każdego wierzchołka można dotrzeć do każdego innego wierzchołka kierując się „ścieżką” wzdłuż krawędzi zorientowanych (zob. [17]).

Czytelnik bez wątpienia dostrzegł związek podejścia grafowego do macierzy i ich nieredukowalności z macierzami preferencyjnymi. W uproszczonym modelu Keenera (lub w modelu Kendalla i Smitha) nieredukowalność macierzy **A** oznacza, że każdych dwóch graczy można porównać poprzez serię wygranych. Tego typu sytuacja nie jest w sporcie całkowicie naturalna. Wprawdzie zawsze dwóch (czynnych) zawodników, powiedzmy A i B, można „połączyć” poprzez pewnych takich graczy $A_1, \ldots, A_{k-1}$, że $A = A_0$ grał z A_1, A_1 z $A_2, \ldots, A_{k-1}$ grał z $A_k = B$, to jednak trudno zakładać, że każde z tych spotkań kończyło się wygraną A_{i-1}. Można bowiem wyobrazić sobie „pogromcę” – zawodnika, który wygrywa ze wszystkimi. Powoduje to konieczność odpowiedniej modyfikacji macierzy preferencji.

Jeśli $\mathbf{A} \geqslant 0$, to **A** jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ istnieje takie $k = k(i, j)$, że $(\mathbf{A}^k)_{ij} > 0$. Chodzi oczywiście o współczynnik macierzy $\mathbf{A}^k$ stojący w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie. Czytelnik dostrzeże zapewne, że dla dowolnej macierzy $\mathbf{A} \geqslant 0$ wyraz $(\mathbf{A}^k)_{ij}$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $\mathbf{G_A}$ istnieje ścieżka długości k prowadząca z j do i. Z tą obserwacją wiąże się ciekawa charakteryzacja *dynamiczna* nieredukowalności.

Twierdzenie. *Rozważmy problem Cauchy'ego* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, *przy czym* $\mathbf{A} \geqslant 0$, *i jego rozwiązanie* $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$. *Macierz* **A** *jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{x}(t) > 0$ *dla dowolnego warunku początkowego* $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$ *i* $t > 0$ (*równoważnie, macierz* $e^{\mathbf{A}}$ *jest dodatnia*).

Można też wykazać, że nieujemna macierz **A** jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1} > 0$ (zob. [6]).

Jest jasne, że macierz pierwotna jest nieredukowalna, lecz nie na odwrót (na przykład wspomniana wyżej macierz $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ jest nieredukowalna, lecz nie jest pierwotna). Od Frobeniusa pochodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Macierz* $\mathbf{A} \geqslant 0$ *jest pierwotna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieredukowalna oraz* $\pi(\mathbf{A}) = \{r(\mathbf{A})\}$.

Stąd mamy kolejny warunek dostateczny pierwotności: *jeśli macierz jest nieredukowalna i* $a_{ii} > 0$ *dla* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *to* $\mathbf{A}$ *jest pierwotna.*

Gdy weźmiemy pod uwagę powyższe rozważania, otrzymujemy zapowiedziany rezultat.

Twierdzenie (Frobeniusa)**.** *Załóżmy, że macierz* $\mathbf{A} \geqslant 0$ *jest nieredukowalna. Wówczas:*

1° $r := r(\mathbf{A}) > 0$, $r \in \sigma(\mathbf{A})$ *i* $m_a(r) = 1$,

2° *istnieje dokładnie jedna para własna* $(r, \mathbf{p})$ *dla* $\mathbf{A}$, *przy czym* $\mathbf{p} > 0$ *i* $\|\mathbf{p}\| = 1$,

3° *jeśli* $(\mu, \mathbf{w})$ *jest parą własną macierzy* $\mathbf{A}$ *oraz* $\mathbf{w} \geqslant 0$, *to* $\mu = r$ *i* $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ *dla pewnego* $\alpha > 0$,

4° *widmo peryferyczne* $\pi(\mathbf{A})$ *składa się dokładnie z k punktów* $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}$, *przy czym k jest tzw.* indeksem niepierwotności[3] *macierzy* $\mathbf{A}$ *oraz* $\lambda_j = re^{2i\pi j\ k}$ *jest wartością własną o krotności równej* 1,

5° *widmo* $\sigma(\mathbf{A})$ *jest niezmiennicze ze względu na obrót płaszczyzny o kąt* $\frac{2\pi}{k}$.

Dowód twierdzenia Frobeniusa jest dalece nietrywialny. W literaturze można znaleźć dowody analityczne, czysto algebraiczne, lecz także oparte na rozważaniach probablistycznych lub wynikające z teorii spektralnej (o różnych dowodach pisze na przykład MacCluer w artykule [18]). Najczęściej autorzy idą śladem Wielandta, który w 1950 roku opublikował przełomową pracę [33] z pełnym dowodem powyższego twierdzenia, uzupełnionym o tzw. wzór Collatza–Wielandta.

Twierdzenie (wzór Collatza–Wielandta)**.** *Jeśli macierz* $\mathbf{A} \geqslant 0$ *jest nieredukowalna, to zachodzi równość*

$$\max_{\mathbf{x}\geqq 0} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Ax})_i}{x_i} = r(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{x}\geqq 0} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x_i\neq 0}} \frac{(\mathbf{Ax})_i}{x_i},$$

przy czym $(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

[3] Jeśli $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-k_1} + c_2\lambda^{n-k_2} + \cdots + c_s\lambda^{n-k_s}$, przy czym wypisano tylko niezerowe współczynniki, *indeksem niepierwotności* nazywa się liczbę $k = NWD\{k_1, \ldots, k_s\}$. Dla macierzy pierwotnych liczby $k_1, \ldots, k_s$ są względnie pierwsze.

Ten ciekawy fakt dodatkowo wskazuje na rolę macierzy nieredukowalnych. Dla dowolnej macierzy nieujemnej **A** mamy bowiem tylko następujące oszacowania:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant r(\mathbf{A}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad \min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant r(\mathbf{A}) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Twierdzenia Perrona i Frobeniusa wyczerpują wyniki egzystencjalne. Jak jednak obliczyć parę własną Perrona (szczególnie, gdy wymiar macierzy jest duży, co wyklucza obliczenia ręczne)?

Twierdzenie (metoda potęgowa)**.** *Jeśli widmo peryferyczne* $\pi(\mathbf{A}) = \{r(\mathbf{a})\}$, $r = r(\mathbf{A})$ *jest półprostą wartością własną, tzn.* $m_a(r) = m_g(r)$ *i wektor* $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{C}^n$ *nie jest prostopadły do przestrzeni własnej* $V_r(\mathbf{A})$, *to ciąg* $\mathbf{v}_k = \|\mathbf{A}^k\mathbf{v}_0\|^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{v}_0$, *przy czym* $k \geqslant 1$, *jest zbieżny do* (*znormalizowanego*) *wektora własnego odpowiadającego* r. *W szczególności, jeśli* **A** *jest macierzą pierwotną*, *to wektor Perrona jest równy granicy*[4] $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\mathbf{e}\|^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{e}$.

Z punktu widzenia zastosowań rankingowych szczególnie interesujący jest przypadek macierzy stochastycznych. Macierz $\mathbf{P} = [p_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n] \geqslant 0$ jest (kolumnowo) *stochastyczna*, jeśli dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$ zachodzi wzór $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$. Widać, że dla macierzy stochastycznej $r(\mathbf{P}) = 1$.

Twierdzenie (Perrona–Frobeniusa dla macierzy stochastycznych)**.** *Jeśli* **P** *jest nieredukowalną macierzą stochastyczną, to* $r = r(\mathbf{P}) = 1$ *jest jednokrotną wartością własną o dodatnim* (*znormalizowanym*) *wektorze własnym Perrona* **p**. *Dodatkowo, jeśli macierz* **P** *jest pierwotna, to* $\mathbf{p} = \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^k\mathbf{e}$.

Ten fragment zakończymy rezultatem, które pokazuje siłę twierdzenia Frobeniusa.

Twierdzenie. *Niech* $\mathbf{A} \geqslant 0$. *Macierz* **A** *jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą warunki* 1° *oraz* 2° *z twierdzenia Frobeniusa. Macierz* **A** *jest pierwotna wtedy i tylko wtedy, gdy oprócz tego i widmo peryferyczne* $\pi(\mathbf{A})$ *jest jednopunktowe.*

6. Algorytm Google PageRank, ranking witryn internetowych

Podobnie jak James Watt, który udoskonalił, ale przede wszystkim rozpowszechnił i opatentował maszyny parowe, a dzięki dobremu zmysłowi do interesów dorobił się dużego majątku, tak Larry Page i Sergey Brin (obaj uro-

[4] Szybkość zbieżności iteracji można oszacować. Znana jest także tzw. odwrotna metoda potęgowa pozwalająca na iteracyjne obliczenie promienia spektralnego.

Sergey Brin i Larry Page

dzeni w 1973 roku), ówcześnie doktoranci na Uniwersytecie Stanforda, umiejętnie wykorzystali i wdrożyli do oceny wartości witryn internetowych metodę rankingu opartą na teorii Perrona–Frobeniusa. Po jej opatentowaniu pod nazwą PageRank w USA (obecnie właścicielem patentu jest Uniwersytet Stanforda) Page i Brin wystartowali z firmą Google Inc. i jej flagowym produktem w postaci wyszukiwarki internetowej Google (należy zauważyć, że PageRank to metoda rankingu, a nie wyszukiwarka – to jest zupełnie inna sprawa).

Ta znana każdemu i używana na całym świecie (może poza Chinami) przeglądarka zapewniła jej twórcom sławę i majątek i – niestety – zapomnienie wielu innych „bohaterów" teorii rankingu. Prekursorami w zakresie rankingowania stron internetowych byli Massimo Marchiori z Uniwersytetu w Padwie, twórca pierwszej publikacji [19] z 1997 roku na temat analizy odniesień i połączeń w internecie, Jon Kleinberg, twórca algorytmu HITS z 1998 roku (konkurencyjnego z PageRank), Robin Li, autor algorytmu RankDex z 1996 roku, oraz Lawrence Page, autor prototypu narzędzia do hierarchizowania stron z 1998 roku. Kropkę nad i postawili Page, Brin, Rajeev Motwani i Terry Winograd, którzy w 1999 roku opublikowali niemal ostateczną wersję algorytmu PageRank Google Search Engine (nazwa pochodzi od nazwiska Page'a, zob. też [21]). Nowością było wzbogacenie algorytmu o mechanizm tzw. tłumienia (ang. *damping*), w czym zresztą autorzy idą śladem Katza. O reszcie zadecydował wspaniały sukces komercyjny Google, marketing i *public relations*. Nieduża, dysponująca początkowo niskim budżetem wyszukiwarka zaczęła skutecznie rywalizować z gigantami internetowymi. Sam algorytm PageRank jest obecnie przedmiotem wielu modyfikacji, dalszych udoskonaleń, których nie sposób przedstawić w tym miejscu; zainteresowanego czytelnika odsyłam do internetu, gdzie można znaleźć setki stron na ten temat (zob. też [15]).

Idea PageRank jest taka, jak poprzednio – o wartości witryny internetowej nie może świadczyć tylko liczba jej odwiedzin przez internautów, ani liczba odnośników (powszechnie zwanych „linkami") do tej strony. Ważne jest z jakich i ilu stron prowadzą linki do ocenianej strony[5]. Z tego punktu widzenia najlepiej sprawdza się badanie struktury powiązań (*hyperlink structure*). W PageRank (PR) zastosowana jest metoda nadawania stronom internetowym określonej wartości liczbowej, oznaczającej jej jakość; wartość PR zależy głównie od współczynnika Link Popularity (LP). Strony o wysokim PR mają przeważnie lepszą pozycję w wyszukiwarkach oraz wyższą oglądalność. Należy jednak pamiętać, że PR jest tylko jednym z wielu czynników decydujących o pozycji danej strony wśród wyników wyszukiwania i niekoniecznie odzwierciedla jakość tych stron. Bez wątpienia jednak wpływa na liczbę odwiedzin danej strony (i w ten sposób – jak zobaczymy – ponownie wpływa na ranking).

Omówimy tę metodę ogólnie dla sieci składającej się z n stron $1, 2, \ldots, n$. Najpierw tworzymy macierz $\mathbf{G} = [g_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ w następujący sposób: $g_{ij} = 1$, gdy istnieje link ze strony j do strony i. Przyjmujemy, że $g_{ii} = 0$ dla dowolnego i. Ponadto niech $c_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}$, a zatem c_j jest liczbą linków wychodzących ze strony j.

Przyjmijmy dalej, że $p_{ij} = \frac{g_{ij}}{c_j}$ (jeśli $c_j = 0$, tzn. ze strony j nie wychodzą żadne linki, to przyjmujemy, że $g_{ij} = 0$ dla wszystkich i; wtedy też $p_{ij} = 0$). Liczba p_{ij} jest więc prawdopodobieństwem zdarzenia polegajacego na tym, że będąc na stronie j wybierzemy link do strony i.

Tworzymy *macierz połączeń* $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Macierz $\mathbf{P}$ jest niestety tylko „prawie" stochastyczna, bo dla strony j, z której wychodzą jakieś linki, mamy $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$. Problem stanowią strony „wiszące" (ang. *dangling*), z których żadne linki nie wychodzą. Są to ci „pogromcy" w modelu sportowym Keenera lub „najpiękniejsi" w modelu Kendalla i Smitha. Jeżeli j jest taką stroną, to $c_j = 0$, a to właśnie znaczy, że $p_{ij} = 0$ dla wszystkich i.

Intuicyjnie jasne jest, że jeżeli stronie j przypiszemy „hipotetyczną" wartość w_j, to wartość w_i strony i powinna spełniać zależność

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} w_j, \tag{3}$$

[5] Jakaż szkoda, że podczas liczenia głosów wyborczych lub indeksu cytowań autora nie bierze się pod uwagę kwalifikacji wyborców, cytujących prace albo jakości prac, w których takie cytowania występują... Ale jest to temat na odrębną dyskusję.

która orzeka, że wartość w_i zależy od wartości w_j wszystkich stron j, z których z prawdopodobieństwem p_{ij} można dojść do strony i. W zapisie macierzowym formuła (3) oznacza, że

$$\mathbf{P}\mathbf{w} = \mathbf{w}, \text{ przy czym } \mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^{\mathsf{T}}.$$

Oczywiście istnienie i znajomość wektora **w** (który – jak widzimy – jest wektorem własnym o wartości własnej równej 1) umożliwia dokonanie rankingu: po prostu należy uszeregować jego współczynniki w porządku malejącym.

Gdyby było wiadomo, że macierz **P** jest stochastyczna i nieredukowalna, to zagadnienie znalezienia wektora rankingowego w sprowadzałoby się do twierdzenia Perrona–Frobeniusa: wektor **w** wyznaczony jest wtedy jednoznacznie. Problem w tym, że macierz **P** często nie jest stochastyczna, bo w sieci znajdują się strony „wiszące"; ponadto na ogół macierz połączeń (nawet, jeśli jest stochastyczna) nie jest nieredukowalna, co zresztą przy bardzo dużej sieci jest trudne do zweryfikowania. Potrzebne są więc dodatkowe modyfikacje, tzw. tłumienie i wybór wstępnej preferencji.

W pierwszym kroku należy „pozbyć" się stron wiszących. Przeciętny internauta znalazłszy się na stronie, z której nie wychodzą linki, losowo z prawdopodobieństwem 1 n wybierze adres jednej z pozostałych stron (niewykluczone, że tej samej). Innymi słowy, do linków istniejących realnie dodajemy „wirtualne" linki prowadzące od wiszącej strony j do wszystkich innych stron (włącznie ze nią samą). Uwzględniając to, zastępujemy zerową j-tą kolumnę macierzy **P** kolumną wyrazów $p_{ij} = \frac{1}{n}$ dla dowolnego i. Tak powstała nowa macierz **P** jest już stochastyczna. Niestety, ta macierz na ogół nie jest jeszcze nieredukowalna.

Druga modyfikacja polega na przyjęciu racjonalnego założenia, że internauta znajdujący się na dowolnej stronie albo z prawdopodobieństwem $\alpha \in (0,1)$ wybierze jeden z dostępnych linków (istniejących bądź „wirtualnych") oferowanych na tej stronie albo, zdając się na „ślepy los", z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ (tzw. *decay factor*) wybierze w przeglądarce jakiś nowy (spośród dostępnych) adres URL (w praktyce PageRank używa doświadczalnie sprawdzonej wartości $\alpha = 0{,}85$). Tym sposobem powstanie *nowa* macierz połączeń

$$\mathbf{R} = \alpha\mathbf{P} + (1 - \alpha)\mathbf{V},$$

przy czym $\mathbf{V} = [v_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ jest macierzą połączeń, w której z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$ można dojść z każdej strony do każdej innej, a więc $v_{ij} = 1\ n$. Inaczej to ujmując, α (tzw. współczynnik tłumienia) jest wagą, z jaką na ranking oddziałuje macierz połączeń, $(1 - \alpha)$ zaś jest wagą, z jaką na ranking ostateczny oddziałuje los.

Tak otrzymana macierz **R**, zwana *macierzą rankingową*, jest już stochastyczna i dodatnia. Wektor rankingowy $\mathbf{w} = \mathbf{Rw}$ jest zatem wyznaczony jednoznacznie i można go efektywnie wyznaczyć stosując metodę potęgową.

7. Ponownie ranking sportowy

Wróćmy w tym miejscu do modelu rankingu sportowego. Zatrzymaliśmy się tam na wzorze (2), w którym macierz (1) jest stochastyczna, lecz – podobnie jak przed chwilą – nie jest nieredukowalna. Jedna uwaga jest tu na miejscu – omawiając ranking Keenera, celowo przyjęliśmy brak „pogromcy", tzn. odpowiednika strony „wiszącej". Wiemy jednak, że w rzeczywistości bywają zawodnicy niezwyciężeni (przynajmniej okresowo). Gdyby dopuścić taką sytuację, potrzebna by była również pierwsza z modyfikacji. Jak, w warunkach rankingu sportowego, można ją racjonalnie wyjaśnić? Otóż motywacją dla zastąpienia kolumny zerowych przegranych takiego niezwyciężonego zawodnika kolumną niezerową jest uznanie, że taki gracz mógł z prawdopodobieństwem 1 5 (lub 1 n, gdy jest n graczy) przegrać z każdym innym. Nie jest to być może najlepsze rozwiązanie, bo tym sposobem niepotrzebnie „karzemy" mistrza.

Załóżmy jednak, że macierz preferencyjna (1) jest stochastyczna. Aby zapewnić jej nieredukowalność, stosuje się modyfikację podobną do zastosowanej powyżej. Otóż przyjmuje się, że macierzą rankingu sportowego jest

$$\mathbf{R} = \alpha\mathbf{P} + (1-\alpha)\mathbf{V},$$

przy czym $\alpha \in (0,1)$, $\mathbf{V} = \mathbf{e}\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$, a $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_5]^{\mathsf{T}}$ jest wektorem *preferencji początkowych* (zatem $v_{ij} = v_i$ dla dowolnego j) oraz $\|\mathbf{v}\| = 1$. Wzięcie takiej macierzy **V** (wyznaczonej przez wektor **v**) uzasadnione jest na przykład wcześniejszymi rankingami danego zawodnika, jego nabytymi kontuzjami itp., czyli czynnikami, które *a priori* mogą wpływać na jego wartość. Wartość α jest – podobnie jak w przypadku PageRank – wagą, z jaką na ostateczny ranking wpływają rozgrywki i z jaką o rankingu decydują wstępne preferencje. Oczywiście również w przypadku PageRank można rozważyć taką definicję **V**, która odzwierciedlałaby początkowe preferencje (są strony *a priori* ciekawsze... dla internautów).

7.1. *Rzeczywistość.* Omówiliśmy kilka technik sporządzania list rankingowych w sporcie lub w internecie. W rzeczywistości zrzeszenia zawodników liczą tysiące graczy, a sieci internetowe składają się z milionów stron i milionów połączeń. Ale idea poszukiwania macierzy rankingowej R i jej wektora własnego w pozostaje niezmieniona. Oczywiście prowadzone obliczenia wymagają ogromnych zasobów obliczeniowych (jakkolwiek o niewielkiej złożoności) oraz nieustannych aktualizacji, co też wymaga uwagi i nie dzieje się za każdym razem „od nowa". Jak powiedział Clive Moler (twórca MatLaba), „PageRank stanowi największe na świecie obliczenia macierzowe".

Podczas wyszukiwania interesujących stron internetowych stosowane są różne metody. Mając dane zapytanie, wyszukiwarka nadaje stronie „wartość" według metody PageRank (lub innej stosowanej przez określoną wyszukiwarkę), ale także bierze pod uwagę częstość występowania słów w zapytaniu, ich bliskość lub obecność w nagłówkach itp. Wiele z tych dodatkowych metod pozostaje ściśle strzeżoną tajemnicą. Algorytmy rankingowe uruchamiane są często (dwa, trzy razy w tygodniu), gdyż strony internetowe są bezustannie modyfikowane, dodawane i usuwane. Obecnie PageRank nieco traci na znaczeniu. Wynaleziono wiele metod i technik „oszukiwania" rankingów, twórcy i właściciele stron stosują różne manipulacje, aby znaleźć się jak najwyżej w zestawieniach (ze zrozumiałych względów), na przykład tworzy się sztucznie wiele niepotrzebnych linków. Aby temu przeciwdziałać, opatentowano mniej lub bardziej skuteczne metody. Z kolei twórcy metod rankingowych pracują nad wariantami i ulepszeniami metod rankingowych, na przykład nad wersjami spersonalizowanymi. Chodzi o to, by przeprowadzany ranking dotyczył nie wszystkich stron (tak, jak to na ogół ma miejsce), lecz tylko stron zawierających słowa z zapytania (tzw. *topic-sensitive PageRank*, zob. [8]) i był możliwie dalece dostosowany do użytkownika (stąd biorą się wielce uciążliwe pliki *cookies*) albo *Trust-Rank* stosowany do zwalczania spamu.

8. Rozwój teorii Perrona–Frobeniusa

Teoria spektralna macierzy, poza wieloma różnymi zastosowaniami, rozwijała się (i nadal rozwija). Trudno zaprezentować wszystkie kierunki rozwoju; ograniczę się zatem do zdawkowego opisu kilku aspektów.

8.1. *Algebraiczna nieujemność.* Mówimy, że macierz $\mathbf{A}$ jest algebraicznie dodatnia (odpowiednio, nieujemna), gdy istnieje taki wielomian rzeczywisty f, że $f(\mathbf{A})$ jest macierzą dodatnią (nieujemną). Na przykład macierz $\begin{bmatrix} 1\;2 & -1\;2 \\ -1\;2 & 1\;2 \end{bmatrix}$ jest algebraicznie dodatnia, lecz żadna jej potęga nie jest dodatnia (czyli nie jest ona pierwotna). Praktycznie cała teoria Perrona–Frobeniusa, z dość oczywistymi modyfikacjami, została przeniesiona na przypadek takich macierzy (zob. m.in. artykuł [13]). Na przykład okazuje się, że macierz $\mathbf{A}$ jest algebraicznie dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy ma jednokrotną wartość własną $\lambda \in \mathbb{R}$, której odpowiadają dodatnie wektory własne $\mathbf{v}$ dla $\mathbf{A}$ i $\mathbf{v}'$ dla $\mathbf{A}^\top$.

Szczególny przypadek stanowią macierze *quasi-nieujemne*, tj. takie, że $a_{ij} \geqslant 0$ dla dowolnych $i \neq j$ (znane są też pod nazwą macierzy Metzlera, lub M-macierzy). Nietrudno udowodnić, że jeśli $f(x) = \alpha + x$, to $f(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{A} \geqslant 0$, o ile α jest dostateczne duże. Łatwo wykazać, że jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą quasi-dodatnią, to wartością własną, której odpowiada dodatni wektor własny, jest tzw. *ograniczenie spektralne*, czyli liczba $s(\mathbf{A}) := \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\}$ – (zob. [1]). Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą nieujemną, to $s(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$. Macierze quasi-nieujemne mają wiele zastosowań w biologii (zob. [30]); interesująca jest również ich interpretacja geometryczna. Mianowicie, macierz $\mathbf{A}$ jest quasi-nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\mathbf{u} \geqslant 0$, $\mathbf{Au}$ należy do *stożka stycznego* do oktanta $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} \geqslant 0\}$ w punkcie $\mathbf{u}$.

8.2. *Podejście poprzez stożki.* Łatwo zobaczyć, że macierz $\mathbf{A}$ jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{Au} \geqslant 0$ dla dowolnego $\mathbf{u} \geqslant 0$, tzn. $\mathbf{A}(K) \subset K$, gdzie $K = \mathbb{R}^n_+$. Załóżmy, że $K \subset \mathbb{R}^n$ jest *dowolnym* stożkiem (czyli takim zbiorem wypukłym, że jeśli $\mathbf{x} \in K$ i $\lambda \geqslant 0$, to $\lambda\mathbf{x} \in K$). Bardzo ciekawy wariant teorii Perrona–Frobeniusa dotyczy tzw. macierzy K-nieujemnych (zob. [1]). Macierz $\mathbf{A}$ jest *K-nieujemna*, gdy $\mathbf{A}(K) \subset K$ (oraz *K-pierwotna*, gdy $\mathbf{A}(K \setminus \{0\}) \subset \operatorname{Int} K$). Teorię tę nazywa się także (skończenie wymiarową) teorią Kreina–Rutmana (zob. też [16, 29]). W tym kontekście można też rozwijać teorię macierzy spełniających wyżej wspomniany warunek geometryczny, tzn. macierzy stycznych do stożka K.

8.3. *Nieskończenie wymiarowa teoria Perrona–Frobeniusa.* Mówimy na ogół o teorii Kreina–Rutmana: mamy tu do czynienia z teorią operatorów w przestrzeniach Banacha X wyposażonych w stożek K, o którym najczęściej zakłada się, że jest *totalny*, tzn. różnica algebraiczna $K - K$ jest gęsta w X. Przedmiotem badań są operatory liniowe ograniczone (lub nieograniczone) A zachowujące stożek, tzn. $A(K) \subset K$ (lub $A(K \cap D(A)) \subset K$, gdzie $D(A)$ jest dziedziną A). Dobrym wprowadzeniem do tej niezwykle ciekawej i użytecznej (m.in. w równaniach cząstkowych) teorii jest książka [3]. Typowy rezultat stanowi twierdzenie Kreina–Rutmana, które orzeka, że dowolny zwarty operator ograniczony o dodatnim promieniu spektralnym i zachowujący stożek ma parę własną $(r(A), x)$, przy czym $x \in K \setminus \{0\}$.

Nieliniowa teoria Perrona–Frobeniusa dotyczy *nieliniowych* operatorów zachowujących stożki (w skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej – zob. książkę [16], lub w przestrzeni Banacha – zob. na przykład pracę [2]) i ich uogólnionych wartości własnych.

Tutaj musimy zakończyć ten zwięzły przegląd różnych teorii, które mają korzenie w twierdzeniach Perrona i Frobeniusa. Dowodzi on niezbicie potencjału, który w tych twierdzeniach tkwi.

9. Inne zastosowania teorii Perrona–Frobeniusa

Poza zastosowaniami w spektralnej teorii rankingów, teoria Perrona–Frobeniusa znalazła szereg ważnych zastosowań w wielu dziedzinach matematyki i nie tylko (zob. m.in. [1, 18]). Nie sposób wymienić ich wszystkich – ograniczymy się więc tylko do wypunktowania niektórych:

- teoria procesów Markowa – wektor Perrona odgrywa tu rolę tzw. rozkładu niezmienniczego lub stacjonarnego,
- teoria grafów, kolejek, socjometria, sieci neuronowe,
- modelowanie ekonomiczne Leontiewa, w szczególności teoria kształtowania tzw. cen sprawiedliwych oraz badanie zależności pomiędzy różnymi gałęziami gospodarki – wektor Perrona pełni rolę wektora zaopatrzenia rynku,
- dynamika populacyjna w modelu Lesliego – opisuje między innymi populację rodzaju żeńskiego w różnych gatunkach,
- prawo równowagi Walrasa w gospodarce konkurencyjnej – równowagę zadaje wartość własna Perrona–Frobeniusa,
- metody numeryczne w równaniach cząstkowych,
- topologia niskich wymiarów – okazuje się, że twierdzenie Perrona stanowi zasadniczy krok w klasyfikacji Thurstona homeomorfizmów powierzchni,
- epidemiologia – wartość własna Perrona wyznacza tzw. próg Kermacka–McKendricka w pewnych modelach epidemiologicznych,
- mechanika statystyczna,
- iteracyjna teoria macierzy – twierdzenie Steina–Rosenberga dotyczące szybkości zbieżności metod iteracyjnych Gaussa i Jacobiego stosowanych podczas rozwiązywania równań liniowych.

Ten krótki i bardzo powierzchowny przegląd pokazuje, że teoria Perrona–Frobeniusa jest zapewne niezrównanym przykładem głębokich, lecz prostych zastosowań matematyki czystej.

10. Zakończenie

Na zakończenie wróćmy do Agnieszki Radwańskiej. Czy wyjaśniliśmy spektakularny awans w rankingu WTA? I tak, i nie. Mam nadzieję, że mechanizm tworzenia rankingów sportowych stał się jasny, lecz – o ile mi wiadomo –

rankingi ATP/WTA nie są sporządzane aż tak naukowymi metodami. Decydujące znaczenie mają w nich miejsca zajęte w turniejach (z preferencją dla tzw. turniejów wielkoszlemowych), nie ma niestety znaczenia wartość pokonanego przeciwnika – liczy się tylko etap zawodów, na którym rozegrano zwycięski pojedynek. Co gorsza, im więcej zawodnik gra, tym wyżej jest oceniany. Zdobyte punkty w danym turnieju ważą przez cały rok, do chwili następnej imprezy tego rodzaju, co utrudnia aktualną ocenę. Cóż – i tu matematyka, jak zwykle, idzie o kilka kroków przed zastosowaniami...

Bibliografia

[1] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia 1994.

[2] K. C. Chang, *A nonlinear Krein–Rutman theorem*, J. Syst. Sci. Complex 22 (2009), 542–554.

[3] Y. Du, *Order structure and topological methods in nonlinear partial differential equations*, World Scientific, New Jersey 2006.

[4] G. Frobenius, *Über Matrizen aus positiven Elementen*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (1908), 471–476.

[5] F. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, S.-B Preuss. Akad. Wiss. 26 (1912), 456–477.

[6] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices, Volume I, II*, Chelsea Publ. Co., New York 1959.

[7] E. Garfield, *The Agony and the Ecstasy – The History and Meaning of the Journal Impact Factor*, Internat. Congress on Peer Review and Biomedical Publication (Chicago, 2008), dostępne pod adresem http://garfield.library.upenn.edu/papers/jifchicago2005.pdf.

[8] T. Haveliwala, G. Jeh, S. Kamvar, *An Analytical Comparison of Approaches to Personalizing PageRank*, Stanford University Technical Report 2003.

[9] T. Hawkins, *Continued fractions and the origins of the Perron–Frobenius theorem*, Arch. Hist. Exact Sci. 62 (2008), 655–717.

[10] L. Katz, *A new status index derived from sociometric analysis*, Psychometrika 18 (1953), 39–43.
[11] J. Keener, *The Perron–Frobenius Theorem and the ranking of football teams*, SIAM Rev. 35 (1993), 80–93.
[12] M. G. Kendall, *Further contributions to the theory of paired comparisons*, Biometrics 11 (1955), 43–62.
[13] S. Kirkland, P. Qiao, X. Zhan, *Algebraically positive matrices*, Lin. Algebra App. 1 (2016), 14–26.
[14] E. Kohlberg, J. Pratt, *The contraction mapping approach to the Perron–Frobenius theory: why Hilbert's metric?*, Math. Oper. Res. 7 (1982), 198–210.
[15] A. N. Langville, C. D. Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, Princeton 2006.
[16] B. Lemmens, R. Nussbaum, *Nonlinear Perron–Frobenius Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2012.
[17] B. Liu, H.-J. Lai, *Matrices in Combinatorics and Graph theory*, Kluwer, Boston 2000.
[18] C. R. MacCluer, *The many proofs and applications of Perron's theorem*, SIAM Rev. 42 (2000), 487–498.
[19] M. Marchiori, *The quest for correct information on theWeb: hyper search engines*, Comp. Networks ISDN Systems 29 (1997), 1225–1235.
[20] C. Meyer, *Matrix Algebra and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia 2004.
[21] L. Page, S. Brin, R. Motwani, T. Winograd, *The PageRank citation ranking: Bringing order to the web*, Technical Report SIDL-WP-1999-0120, Stanford University 1998.
[22] O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbrauchalgorithmus*, Math. Ann. 63 (1907), 1–76.
[23] O. Perron, *Zur Theorie der Matrices*, Math. Ann. 63 (1907), 248–263.
[24] G. Pinski, F. Narin, *Citation influence for journal aggregates of scientific publications: Theory, with application to the literature of physics*, Inf. Process. Manage 12 (1976), 297–312.
[25] T. L. Saaty, *The analytical hierarchy process*, McGraw-Hill, New York 1980.
[26] T. L. Saaty, *Rank according to Perron: A new insight*, Math. Magazine 60 (1987), 211–213.
[27] H. Scarf, *The computation of equilibrium prices: an exposition*, [w:] Handbook of Mathematical Economics (K. J. Arrow, M. D. Intriligator, red.), t. 11, North-Holland Publishing Company 1982, 1007–1061.
[28] J. R. Seeley, *The net of reciprocal influence: A problem in treating sociometric data*, Canadian J. Psychology 3 (1949), 234–240.
[29] B.-S. Tam, *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: The finite-dimensional case*, Taiwanese J. Math. 207–277 (2001).
[30] H. R. Thieme, *Mathematics in Population Biology*, Princeton Univ. Press, Princeton 2003.
[31] S. Vigna, *Spectral Ranking*, Network Sci. 4 (2016), 433–445.

[32] T.-H. Wei, *The Algebraic Foundations of Ranking Theory*, PhD Thesis, University of Cambridge 1952.

[33] H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen*, Math. Z. 52 (1950), 642–648.

Wojciech Kryszewski
Politechnika Łódzka
wojciech.kryszewski@p.lodz.pl